

2024 届高三年级 2 月份大联考

数学试题

本试卷共 4 页, 19 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答: 用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, e^2\}$, $B = \{x | \ln x < 2\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$
 A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, e^2\}$ C. $\{1\}$ D. $\{-1, 0, e^2\}$
2. 已知 $z = \frac{2+i}{2-i} + i$, 则 \bar{z} 的虚部为
 A. $-\frac{9}{5}$ B. $-\frac{9}{5}i$ C. $\frac{9}{5}$ D. $\frac{9}{5}i$
3. 若 $(\sqrt{x} - \frac{a}{x})^6$ 的展开式中常数项的系数是 15, 则 $a =$
 A. 2 B. 1
 C. ± 1 D. ± 2
4. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, AC = 1, \cos A = \frac{5}{6}$, 则 $BC =$
 A. 1 B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$
5. 椭圆 $C_1: x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ 与双曲线 $C_2: \frac{y^2}{a^2} - x^2 = 1 (a > 0)$ 的离心率分别为 e_1, e_2 , 若 $e_1 e_2 = 1$, 则双曲线 C_2 的渐近线方程为
 A. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ B. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ C. $y = \pm \sqrt{2}x$ D. $y = \pm \sqrt{3}x$
6. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = a + 2^n b$, 设甲: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列; 乙: $a + b = 0$, 则甲是乙的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
7. 圆 $C_1: x^2 + y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 + 6x - 4y + 11 = 0$ 的公切线方程是
 A. $y = -x + 1$ B. $y = -x + 1$ 或 $y = x + 5$
 C. $y = -x + 5$ D. $y = x + 1$ 或 $y = 2x + 5$

数学试题 第 1 页 (共 4 页)

8. 若 $\tan \theta = 3 \tan \alpha$, $\sin(\theta + \alpha) = \frac{2}{3}$, 则 $\cos 2(\theta - \alpha) =$

- A. $\frac{2}{9}$ B. $-\frac{1}{9}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{1}{9}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

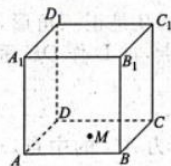
9. 已知一组样本数据 $x_i (i=1, 2, 3, \dots, 30)$ 满足 $0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{30}$, 下列说法正确的是

- A. 样本数据的第 80 百分位数为 x_{24}
 B. 样本数据的方差 $s^2 = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} x_i^2 - 16$, 则这组样本数据的总和等于 120
 C. 若样本平均数恰是该组数据中的一个数, 去掉这个数, 则样本数据的方差不变
 D. 若数据的频率分布直方图为单峰不对称, 且在右边“拖尾”, 则样本数据的平均数大于中位数

10. 函数 $f(x)$ 满足: 对任意实数 x, y 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 2$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) > 2$, 则

- A. $f(0) = 2$ B. $f(x)$ 关于 $(0, 2)$ 对称
 C. $f(-2024) + f(2024) = 4$ D. $f(x)$ 为减函数

11. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为平面 $ABCD$ 所在平面内一动点, 则



- A. 若 M 在线段 AB 上, 则 $D_1M + MC$ 的最小值为 $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$
 B. 过 M 点在平面 $ABCD$ 内一定可以作无数条直线与 D_1M 垂直
 C. 若平面 $\alpha \perp D_1M$, 则平面 α 截正方体的截面的形状可能是正六边形
 D. 若 C_1M 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$, 则点 M 的轨迹为双曲线

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知函数 $f(x) = \sin 4x + a \cos 4x$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{16}$ 对称, 则 $a =$ _____.

13. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} - x - 12 \ln x$ 与 $y = 3x + a (a \in \mathbf{R})$ 相切, 则 $a =$ _____.

14. 抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{4} = 1 (m > 0)$ 有相同的焦点, F_1, F_2 分别是椭圆的上、下焦点, P 是椭圆上的任一点, I 是 $\triangle PF_1F_2$ 的内心, PI 交 y 轴于 M , 且 $\vec{PI} = 2\vec{IM}$, 点 $(x_n, y_n) (n \in \mathbf{N}^*)$ 是抛物线上在第一象限的点, 且在该点处的切线与 x 轴的交点为 $(x_{n+1}, 0)$, 若 $x_2 = 8$, 则 $x_{2024} =$ _____.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

某小区在 2024 年的元旦举办了联欢会,现场来了 1 000 位居民.联欢会临近结束时,物业公司从现场随机抽取了 20 位幸运居民进入摸奖环节,这 20 位幸运居民的年龄用随机变量 X 表示,且 $X \sim N(45, 225)$.

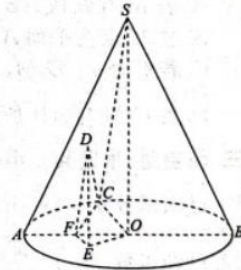
- (1)请你估计现场年龄不低于 60 岁的人数(四舍五入取整数);
- (2)奖品分为一等奖和二等奖,已知每个人摸到一等奖的概率为 40%,摸到二等奖的概率为 60%,每个人摸奖相互独立,设恰好有 n ($0 \leq n \leq 20$) 个人摸到一等奖的概率为 $P(n)$,求当 $P(n)$ 取得最大值时 n 的值.

附:若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则 $P(|X - \mu| < \sigma) = 0.6827$, $P(|X - \mu| < 2\sigma) = 0.9545$.

16. (本小题满分 15 分)

如图,在圆锥 SO 中,若轴截面 SAB 是正三角形, C 为底面圆周上一点, F 为线段 OA 上一点, D (不与 S 重合) 为母线上一点,过 D 作 DE 垂直底面于 E ,连接 OE, EF, DF, CF, CD ,且 $\angle COF = \angle EFO$.

- (1)求证:平面 $SCO \parallel$ 平面 DEF ;
- (2)若 $\triangle EFO$ 为正三角形,且 F 为 AO 的中点,求平面 CDF 与平面 DEF 夹角的余弦值.



17. (本小题满分 15 分)

已知 $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 - ax (a \in \mathbb{R})$,

(1) 若 $f(x) \leq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x}$ 在 $[1, +\infty)$ 恒成立, 求 a 的范围;

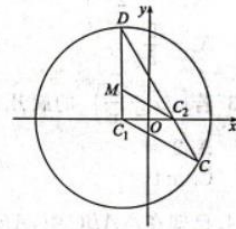
(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 s, t , 求 $f(t) + f(s)$ 的取值范围.

18. (本小题满分 17 分)

已知圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x - 14 = 0$, 与 x 轴不重合的直线 l 过点 $C_2(\sqrt{2}, 0)$, 且与圆 C_1 交于 C, D 两点, 过点 C_2 作 CC_1 的平行线交线段 C_1D 于点 M .

(1) 判断 $|MC_1| + |MC_2|$ 与圆 C_1 的半径的大小关系, 求点 M 的轨迹 E 的方程;

(2) 已知点 $P(\sqrt{2}, 1), Q(\sqrt{2}, -1)$, 直线 m 过点 $F(0, -1)$, 与曲线 E 交于两点 N, R (点 N, R 位于直线 PQ 异侧), 求四边形 $PRQN$ 的面积取值范围.



19. (本小题满分 17 分)

在无穷数列 $\{a_n\}$ 中, 令 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n$, 若 $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n \in \{a_n\}$, 则称 $\{a_n\}$ 对前 n 项之积是封闭的.

(1) 试判断: 任意一个无穷等差数列 $\{a_n\}$ 对前 n 项之积是否是封闭的?

(2) 设 $\{a_n\}$ 是无穷等比数列, 其首项 $a_1 = 2$, 公比为 q . 若 $\{a_n\}$ 对前 n 项之积是封闭的, 求出 q 的两个值 (若多求, 则按前 2 个计分);

(3) 证明: 对任意的无穷等比数列 $\{a_n\}$, 总存在两个无穷数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 使得 $a_n = b_n \cdot c_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 其中 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 对前 n 项之积都是封闭的.

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注齐鲁家长圈微信号：sdgkjzq。



微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索