

### 高三数学试题

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40 分。）

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x - 2 \leq 0\}$ ,  $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$ , 则  $A \cap B = ( \quad )$

- A.  $\{0, 1\}$       B.  $\{0, 1, 2\}$       C.  $[0, 2]$       D.  $[0, 2]$

2. 已知复数  $z$  和虚数单位  $i$  满足  $z = \frac{i}{1+i}$ , 则  $\bar{z} = ( \quad )$

- A.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$       B.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$       C.  $1 - i$       D.  $2 - 2i$

3. 已知向量  $\vec{a} = (1, m)$ ,  $\vec{b} = (1, -1)$ , 且  $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$ , 则实数  $m = ( \quad )$

- A. 3      B.  $\frac{1}{2}$       C.  $-\frac{1}{2}$       D. -3

4. 为了得到函数  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  的图象, 只需把函数  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  的图象  $( \quad )$

- A. 向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度      B. 向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度  
C. 向左平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位长度      D. 向右平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位长度

5.  $\left(1 - \frac{2x}{y}\right)(x+y)^6$  的展开式中  $x^4y^2$  的系数为  $( \quad )$

- A. 55      B. -70      C. 65      D. -25

6. 已知函数  $f(x) = e^{x-1} - e^{-x} + 4$ , 若方程  $f(x) = kx + 4 - k (k > 0)$  有三个不同的根  $x_1, x_2, x_3$ ,

则  $x_1 + x_2 + x_3 = ( \quad )$

- A. 4      B. 3      C. 2      D.  $k$

7. 道韵楼以“古、大、奇、美”著称, 内部雕梁画栋, 有倒吊莲花、壁画、雕塑等, 是历史、文化、民俗一体的观光胜地。道韵楼可近似地看成一个正八棱柱, 其底面面积约为  $3200(\sqrt{2} + 1)$  平方米, 高约为 11.5 米, 则该八棱柱的侧面积约是  $( \quad )$

A. 460 平方米      B. 1840 平方米      C. 2760 平方米      D. 3680 平方米

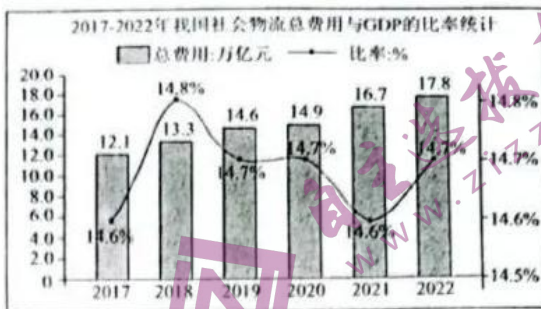


8. 设  $a = 3^{\pi}$ ,  $b = \pi^e$ ,  $c = e^{\pi}$  ( $e$  为自然对数底数), 则  $a, b, c$  大小关系为  $( \quad )$

- A.  $a > b > c$       B.  $a > c > b$   
C.  $c > a > b$       D.  $c > b > a$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 随着国民经济的快速发展和人民生活水平的不断提高,我国社会物流需求不断增加,物流行业前景广阔. 社会物流总费用与GDP的比率是反映地区物流发展水平的指标,下面是2017~2022年我国社会物流总费用与GDP的比率统计,则( ).



A. 2018~2022这5年我国社会物流总费用逐年增长,且2019年增长的最多

B. 2017~2022这6年我国社会物流总费用的70%分位数为16.7万亿元

C. 2017~2022这6年我国社会物流总费用与GDP的比率的极差为0.2%

D. 2019年我国的GDP不达标100万亿元

10. 设数列 $\{a_n\}$ 前 $n$ 项和为 $S_n$ ,满足 $a_n - a_{n-1} = -4$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ 且 $a_1 = 14$ ,则下列选项正确的是( )

A.  $a_n = -4n + 14$       B. 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列

C. 当 $n=8$ 时 $S_n$ 有最大值

D. 设 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$ ,则当 $n=2$ 或 $n=4$ 时数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和取最大值

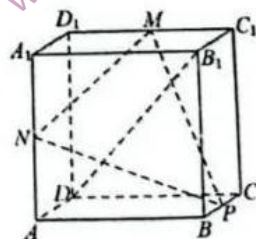
11. 已知点 $P\left(\frac{3\pi}{8}, 1\right)$ 是函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) + b$  ( $\omega > 0$ )的图象的一个对称中心,则( )

A.  $f\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) - 1$ 是奇函数      B.  $\omega = -\frac{2}{3} + \frac{8}{3}k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$

C. 若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right)$ 上有且仅有2条对称轴,则 $\omega = 2$

D. 若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right)$ 上单调递减,则 $\omega = 2$ 或 $\omega = \frac{14}{3}$

12. 如图,在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,已知 $M, N, P$ 分别是棱 $C_1D_1, AA_1, BC$ 的中点, $Q$ 为平面 $PMN$ 上的动点,且直线 $QB_1$ 与直线 $DB_1$ 的夹角为 $30^\circ$ ,则( )



A.  $DB_1 \perp$  平面 $PMN$       B. 平面 $PMN$ 截正方体所得的截面面积为 $3\sqrt{3}$

C. 点 $Q$ 的轨迹长度为 $\pi$

D. 能放入由平面 $PMN$ 分割该正方体所成的两个空间几何体内部(厚度忽略不计)的球的半径的最大值为 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

### 三、填空题

13. 已知点 $P$ 是曲线 $y = \ln x$ 上的一点,则点 $P$ 到直线 $x - y = 0$ 的最小距离为\_\_\_\_\_.

14. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = (a-2)n^2 + n + a$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ . 若  $\{a_n\}$  是等差数列, 则  $\{a_n\}$  的通项公式为\_\_\_\_\_.

15. 某工厂生产一批零件 (单位: cm), 其尺寸  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 且  $P(X \leq 20) = 0.2$ ,  $P(X < 26) = 0.8$ , 则  $\mu =$ \_\_\_\_\_.

16. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点为  $F$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 过  $F$  的直线  $l$  交椭圆于  $A, B$  两点, 且  $|AF| = 3|FB|$ , 则直线  $l$  的斜率为\_\_\_\_\_.

#### 四、解答题

17. 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $c \cos A - a \cos B + c = 0$ .

(1) 求  $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A$  的值;

(2) 若  $a = 5$ , 求  $\triangle ABC$  面积的最大值.

18. 近年来, 国家鼓励德智体美劳全面发展, 舞蹈课是学生们热爱的课程之一, 某高中随机调研了本校 2023 年参加高考的 90 位考生是否喜欢跳舞的情况, 经统计, 跳舞与性别情况如下表: (单位: 人)

	喜欢跳舞	不喜欢跳舞
女性	25	35
男性	5	25

(1) 根据表中数据并依据小概率值  $\alpha = 0.05$  的独立性检验, 分析喜欢跳舞与性别是否有关联?

(2) 用样本估计总体, 用本次调研中样本的频率代替概率, 从 2023 年本市考生中随机抽取 3 人, 设被抽取的 3 人中喜欢跳舞的人数为  $X$ , 求  $X$  的分布列及数学期望  $E(X)$ .

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$$n = a + b + c + d.$$

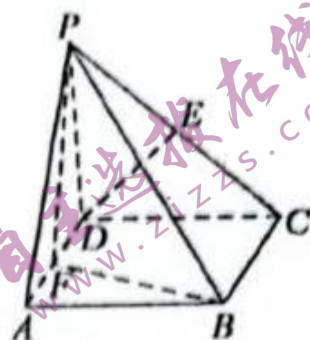
$\alpha$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
$\chi_\alpha^2$	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

19. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2n + 1$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $b_n = \frac{2a_n}{2na_n + 1}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

20. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是正方形,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $E, F$  分别是  $PC, AD$  中点.



(1) 求证:  $DE \parallel$  平面  $PFB$ ;

(2) 若  $PB$  与平面  $ABCD$  所成角为  $45^\circ$ , 求平面  $PFB$  与平面  $EDB$  夹角的余弦值.

21. 已知  $F_1(\sqrt{7}, 0), F_2(-\sqrt{7}, 0)$ ,  $M$  为平面上一动点, 且满足  $||MF_2| - |MF_1|| = 4$ , 记动点  $M$  的轨迹为曲线  $E$ .

(1) 求曲线  $E$  的方程;

(2) 若  $A(-2, 0), B(2, 0)$ , 过点  $(1, 0)$  的动直线  $l$  交曲线  $E$  于  $P, Q$  (不同于  $A, B$ ) 两点, 直线  $AP$  与直线  $BQ$  的斜率分别记为  $k_{AP}, k_{BQ}$ , 求证:  $\frac{k_{AP}}{k_{BQ}}$  为定值, 并求出定值.

22. 已知函数  $f(x) = \ln(mx) - x (m > 0)$ .

(1) 若  $f(x) \leq 0$  恒成立, 求  $m$  的取值范围;

(2) 若  $f(x)$  有两个不同的零点  $x_1, x_2$ , 且  $x_2 > 2x_1$ , 求实数  $m$  的取值范围

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线