# 炎德·英才大联考雅礼中学2024届高三月考试卷(六)

## 数学参考答案

一、二、选择题

| 题　号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答　案 | B | A | D | B | A | D | C | C | BCD | BCD | ACD |

1. B 【解析】在 $y=\sqrt{x-2}$ 中，由 $x-2\geqslant 0$ 得 $x\geqslant 2$，即 $A=[2,+\infty)$，

又由 $\frac{x}{x-4}\leqslant 0$ 可得：$\begin{cases}x(x-4)\leqslant 0,\\ x-4\neq 0,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant x<4$，即 $B=[0,4)$，故 $A\cap B=[2,4)$. 故选 B.

2. A 【解析】由题意得 $z=\frac{1+ai}{1+i^{2023}}=\frac{1+ai}{1-i}=\frac{(1+ai)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(1-a)+(1+a)i}{2}$，

因为 $z$ 为纯虚数，所以 $\begin{cases}1-a=0,\\ 1+a\neq 0,\end{cases}$ 故 $a=1$，所以 $z=i$，故 $|z|=1$，故选 A.

3. D 【解析】方法一：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$，易知 $q\neq 1$. 由题意可得 $\begin{cases}a_1+a_2+a_3=168,\\ a_2-a_5=42,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a_1(1+q+q^2)=168,\\ a_1q(1-q^3)=42,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=96,\\ q=\frac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $a_6=a_1q^5=3$，故选 D.

**方法二**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$，易知 $q\neq 1$. 由题意可得 $\begin{cases}S_3=168,\\ a_2-a_5=42,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=168,\\ a_1q(1-q^3)=42,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=96,\\ q=[illegible],\end{cases}$ [illegible] 故选 D.

4. B 【解析】由题意可知，$\bar{x}=$ [illegible]

将(24,18)代入 $\hat{y}=0.8x+\hat{a}$ [illegible] $\hat{a}=-1.2$，

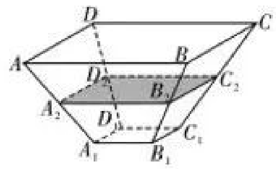
当 $x=30$ 时，$\hat{y}=0.8\times 30-$ [illegible] 故选 B.

5. A 【解析】$(x+y)^8$ 展开式的通项为 $T_{k+1}=C_8^kx^{8-k}y^k$，$k=0,1,\cdots,7,8$.

令 $k=6$，得 $T_{6+1}=C_8^6x^2y^6$；令 $k=5$，得 $T_{5+1}=C_8^5x^3y^5$，

所以 $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 $x^2y^6$ 的系数为 $C_8^6-C_8^5=-28$. 故选 A.

6. D 【解析】设线段 $AA_1,BB_1,CC_1,DD_1$ 的中点分别为 $A_2,B_2,C_2,D_2$，如右图所示：




易知四边形 $AA_1B_1B$ 为等腰梯形，因为线段 $AA_1,BB_1$ 的中点分别为 $A_2,B_2$，

则 $A_2B_2=\frac{AB+A_1B_1}{2}=\frac{4+2}{2}=3$，

设棱台 $A_1B_1C_1D_1-A_2B_2C_2D_2$ 的高为 $h$，体积为 $V_1$，

则棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高为 $2h$，设其体积为 $V$，

则 $V_1=\frac{1}{3}(2^2+3^2+2\times 3)h=\frac{19}{3}h$，则 $V=\frac{1}{3}(4^2+2^2+2\times 4)\cdot 2h=\frac{56}{3}h$，

所以，$\frac{V}{V_1}=\frac{\frac{56h}{3}}{\frac{19h}{3}}=\frac{56}{19}$，所以，该"方斗"可盛米的总质量为 $\frac{56}{19}\times 38=112$ kg. 故选 D.

7. C 【解析】记"选派的4人中至少有2名男老师"为事件 $A$，"选派的4人中有2名女老师"为事件 $B$，则 $P(A)=\frac{C_3^2C_3^2+C_3^3C_3^1}{C_6^4}=\frac{4}{5}$，$P(B)=\frac{C_3^2C_3^2}{C_6^4}=\frac{3}{5}$，$P(AB)=P(B)=\frac{3}{5}$，则在已知选派的4人中至少有2名男老师的条件下，有2名女老师的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{3}{4}$. 故选 C.

8. C 【解析】令 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=\frac{2e^x+f(x)-f(x)}{e^x}=2$，

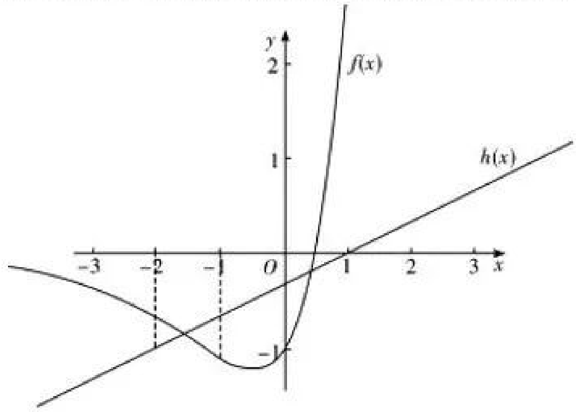
即 $g(x)=2x+c$（$c$ 为常数），则 $f(x)=(2x+c)e^x$，

$\because f(0)=-1$，$\therefore c=-1$，即 $f(x)=(2x-1)e^x$，

$\because f'(x)=(2x+1)e^x$，$f'(x)>0\Rightarrow x>-\dfrac{1}{2}$，$f'(x)<0\Rightarrow x<-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

令 $h(x)=a(x-1)$，由于 $h(x)$ 过定点 $(1,0)$，则函数 $f(x)$ 和 $h(x)$ 的大致图象如下图所示：




要使得 $f(x)<h(x)$ 的解集中恰有两个整数，则有 $\begin{cases} f(-2)\geqslant h(-2), \\ f(-1)<h(-1), \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -\dfrac{5}{e^2}\geqslant -3a, \\ -\dfrac{3}{e}<-2a, \end{cases}$ 解得：$\dfrac{5}{3e^2}\leqslant a<\dfrac{3}{2e}$．故选 C．



9. BCD 【解析】A. 当 $c=0$ 时 [illegible]，不一定正确；

B. 由 $a>b>1$，则 $\log_b a>\log$ [illegible] 一定正确；

C. 由 $a>b>1$，则 $0<\dfrac{1}{a}<$ [illegible] 一定正确；

D. 若 $a+b=4$，则 $2^a+2^b\geqslant 2\sqrt{\ }$ [illegible] 正确．故选 BCD．

10. BCD 【解析】抛物线 $C:y$ [illegible]，其焦点 $F$ [illegible]，准线为 $x$ [illegible]；

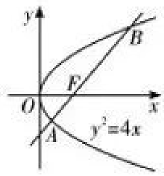
对于 A，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+2=8$，解得 $x_1+x_2=6$，

设 $M$ 为线段 $AB$ 的中点，则 $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，所以点 $M$ 到 $y$ 轴的距离为 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=3$，故 A 错误；

对于 B，由题意，直线 $l$ 斜率不为 0，设 $l:x=ty+1$，联立 $\begin{cases} x=ty+1, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 得 $y^2-4ty-4=0$，$\Delta=(-4t)^2+16>0$，则 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$，$x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2=4t^2+2$，

设线段 $AB$ 中点坐标为 $M(x,y)$，则 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=2t^2+1, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}=2t, \end{cases}$ 消去 $t$ 可得 $y^2=2x-2$，

故弦 $AB$ 的中点的轨迹为抛物线，故 B 正确；




对于 C，易知 $\overrightarrow{BF}=(1-x_2,-y_2)$，$\overrightarrow{FA}=(x_1-1,y_1)$，

由 $\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{FA}$，可得 $1-x_2=3(x_1-1)$，$-y_2=3y_1$，

结合 B 选项可知 $y_1y_2=-4$，则 $x_1x_2=\dfrac{(y_1y_2)^2}{4\times4}=1$，又 $y_1<0$，可得 $A\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$B(3,2\sqrt{3})$，

所以直线 $AB$ 的斜率 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{2\sqrt{3}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{3-\dfrac{1}{3}}=\sqrt{3}$，故 C 正确；

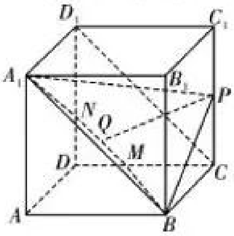
对于 D，由选项 B 可知 $y_1y_2=-4$，$x_1x_2=1$，所以 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}=\dfrac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=\dfrac{x_1+x_2+2}{x_1+x_2+2}=1$，所以 $4|AF|+|BF|=(4|AF|+|BF|)\left(\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}\right)=\left(5+\dfrac{|BF|}{|AF|}+\dfrac{4|AF|}{|BF|}\right)\geqslant 9$，

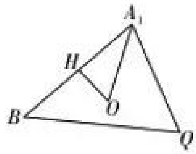
当且仅当$\frac{|BF|}{|AF|}=\frac{4|AF|}{|BF|}$，即$|BF|=2|AF|$时取得等号，故 D 正确. 故选 BCD.

11. ACD 【解析】对于 A，取 $DD_1$，$DC$ 的三等分点分别为 $N$，$M$，如图所示，

因为$\lambda+\mu=\frac{1}{3}$，所以$3\lambda+3\mu=1$，令$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DD_1}$，则$\overrightarrow{DQ}=3\lambda\overrightarrow{DM}+3\mu\overrightarrow{DN}$，所以 $Q\in MN$. 因为 $MN/\!/CD_1$，$CD_1/\!/A_1B$，所以 $MN/\!/A_1B$，

所以$\triangle A_1BQ$的面积为定值，点 $P$ 到平面 $A_1BQ$ 的距离也是定值，故 A 正确；




对于 B，若$\triangle A_1BQ$的外心为 $O$，过点 $O$ 作 $OH\perp A_1B$ 于点 $H$，则 $H$ 是 $A_1B$ 的中点.

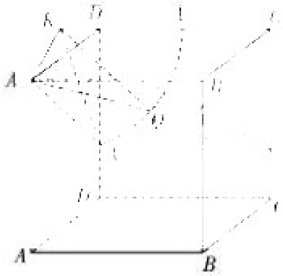
因为$|\overrightarrow{A_1B}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，所以$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{A_1O}=\overrightarrow{A_1B}\cdot(\overrightarrow{A_1H}+\overrightarrow{HO})=\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{A_1H}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}^2=4$，故 B 错误；

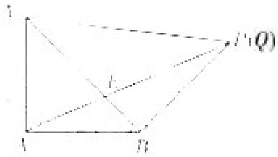
对于 C，在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 中作 $A_1K\perp C_1D_1$，显然 $A_1K\perp$平面 $CC_1D_1D$，由长度和角度，可得 $A_1K=\sqrt{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1KQ$ 中，$A_1Q=\sqrt{5}$，所以 $KQ=\sqrt{2}$，则点 $Q$ 在以 $K$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆上运动.

设此圆与 $D_1D$ 交于点 $A_3$，因为 $KA_3=\sqrt{2}$ 且 $KD_1=1$，

所以$\angle D_1KA_3=\frac{\pi}{4}$，则点 $Q$ 的轨迹长度是$\frac{\pi}{4}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$. 故 C 正确；





对于 D，若$\lambda=1$且$\mu=\frac{1}{2}$，则点 $Q$ 与点 $P$ 重合. 把$\triangle A_1AB$沿着 $A_1B$ 进行翻折，使得 $A_1$，$A$，$B$，$P$ 四点共面，此时 $AE+EQ$ 有最小值 $AP$（这里和后面的 $A$ 均为翻折后的点）.

在$\triangle A_1PB$ 中，$A_1P=\sqrt{13}$，$PB=\sqrt{5}$，$A_1B=2\sqrt{2}$，满足勾股定理逆定理，所以$\angle PBA_1=\frac{\pi}{2}$，从而$\angle PBA=\frac{3}{4}\pi$，

在$\triangle APB$ 中，由余弦定理得$\cos\frac{3\pi}{4}=\frac{AB^2+PB^2-AP^2}{2AB\cdot PB}=\frac{(\sqrt{5})^2+2^2-AP^2}{2\times\sqrt{5}\times2}\Rightarrow AP=\sqrt{9+2\sqrt{10}}$，故 D 正确.

故选 ACD.

**三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.**

12. $-\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1)$，所以 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,2m-1)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-3,m+2)$.

又$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，所以 $4(m+2)+3(2m-1)=0$，解得 $m=-\frac{1}{2}$.

13. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ 【解析】：因为$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$，且$\tan 2\alpha=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，

所以$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，解得$\sin\alpha=\frac{1}{4}$.

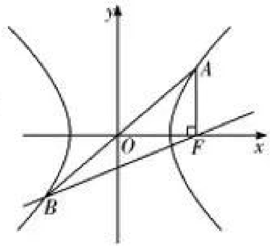
因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{15}$.

**方法二：**因为$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$，且$\tan 2\alpha=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，

所以$\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，解得 $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$.

因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

14. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ 【解析】如图，根据题意 $F(c,0)$，$A\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right)$，$B\left(-c,-\dfrac{b^2}{a}\right)$，




$\therefore k_1=k_{BF}=\dfrac{b^2}{2ac}$，$k_2=k_{BA}=\dfrac{b^2}{ac}=2k_1$，设直线 $BA$，$BF$ 的倾斜角为 $\alpha$，$\beta$，

$\therefore\tan\angle ABF=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2k_1-k_1}{1+2k_1^2}=\dfrac{1}{2k_1+\dfrac{1}{k_1}}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $k_1=\dfrac{b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，

即 $b^2=\sqrt{2}ac$，$c^2-a^2=\sqrt{2}ac$，$e^2-\sqrt{2}e-1=0$，又 $e>1$，$\therefore e=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

**四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15.【解析】(1) 由正弦定理得：$\sin A=\cos C\sin B-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$，



$\because A=\pi-(B+C)$，$\therefore\sin A=\sin(B+C)$，

$\therefore\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\cos C\sin B-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$，

$\therefore\cos B\sin C=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$，又 $\sin C\neq0$，$\therefore\tan B=-\sqrt{3}$，又 $B$ 为三角形内角，$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}$. …………… 5 分

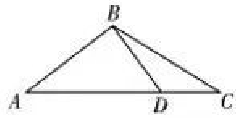
(2) **法一：** 由(1)知 $B=\dfrac{2\pi}{3}$，因为 $DB\perp BA$，所以 $\angle CBD=\dfrac{\pi}{6}$，记 $\angle BDC=\theta$，则 $\angle BDA=\pi-\theta$，

在$\triangle BCD$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{a}{\sin\theta}$，得 $CD=\dfrac{a}{2\sin\theta}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，有 $AD=\dfrac{c}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{c}{\sin\theta}$.

因为 $AD=2DC$，所以$\dfrac{c}{\sin\theta}=\dfrac{a}{\sin\theta}$，得 $c=a$，又 $B=\dfrac{2}{3}\pi$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{6}$. ………………………………………… 13 分

**法二：** 因为 $D$ 在 $AC$ 边上，且 $AD=2DC$，所以$\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.




因为 $BD\perp BA$，所以$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}=0\Rightarrow\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BA}=0\Rightarrow\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，

所以 $c^2=ac\Rightarrow c=a$.

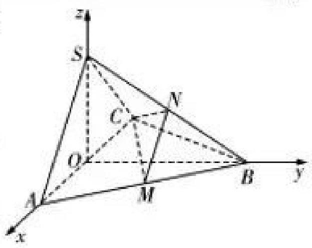
在$\triangle ABC$ 中，$c=a$，$B=\dfrac{2}{3}\pi$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{6}$. ………………………………………… 13 分

16.【解析】(1) 取 $AC$ 的中点 $O$，连接 $SO$，$BO$，$\because SA=SC$，$AB=BC$，$\therefore SO\perp AC$，$BO\perp AC$，

又 $SO\cap BO=O$，$SO\subset$平面 $SBO$，$BO\subset$平面 $SBO$，所以 $AC\perp$平面 $SBO$，

又 $SB\subset$平面 $SBO$，$\therefore AC\perp SB$. ………………………………………… 5 分

(2) $\because$平面 $SAC\perp$平面 $ABC$，平面 $SAC\cap$平面 $ABC=AC$，$SO\subset$平面 $SAC$，$SO\perp AC$，$\therefore SO\perp$平面 $ABC$，




以 $OA$ 为 $x$ 轴，$OB$ 为 $y$ 轴，$OS$ 为 $z$ 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$，如图，

则 $A(2,0,0)$，$B(0,2\sqrt{3},0)$，$C(-2,0,0)$，$S(0,0,2\sqrt{2})$，$M(1,\sqrt{3},0)$，$N(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$，

$\therefore\overrightarrow{CM}=(3,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{MN}=(-1,0,\sqrt{2})$，………………………………… 8 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 $CMN$ 的一个法向量，则$\begin{cases}\overrightarrow{CM}\cdot\boldsymbol{n}=3x+\sqrt{3}y=0,\\\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}=-x+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

取 $z=1$，则 $x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{6}$，故 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},-\sqrt{6},1)$，

又$\overrightarrow{OS}=(0,0,2\sqrt{2})$为平面 $MBC$ 的一个法向量，………………………………………… 12 分

$\therefore \cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{OS}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OS}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{OS}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2+6+1}\times 2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore \sin\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{OS}\rangle=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

故二面角 $N-CM-B$ 的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. ………………………………………………………… 15 分

17.【解析】(1)比赛结束后，冠、亚军恰好来自不同校区的概率 $P=\dfrac{C_3^1C_4^1+C_3^1C_5^1+C_4^1C_5^1}{C_{12}^2}=\dfrac{47}{66}$. ……………… 5 分

(2)①由题可知 $f(p)=C_3^2p^2(1-p)\cdot p=3p^3(1-p)$，$f'(p)=3[3p^2(1-p)+p^3\times(-1)]=3p^2(3-4p)$，

令 $f'(p)=0$，得 $p=\dfrac{3}{4}$或 $p=0$(舍去)，

当 $p\in\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$时，$f'(p)>0$，$f(p)$在$\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$上单调递增，

当 $p\in\left(\dfrac{3}{4},1\right)$时，$f'(p)<0$，$f(p)$在$\left(\dfrac{3}{4},1\right)$上单调递减，

所以 $p_0=\dfrac{3}{4}$. ………………………………………………………………………… 9 分

②$X$ 的所有可能取值为 0，1，2，3，

$P(X=0)=(1-p)^3+C_3^1p(1-p)^2\cdot(1-p)=\left(1-\dfrac{3}{4}\right)^3+C_3^1\times\dfrac{3}{4}\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)^2\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{13}{256}$，



$P(X=1)=C_3^2p^2(1-p)^2\cdot(1-p)=C_3^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)^2\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{27}{512}$，

$P(X=2)=C_3^2p^2(1-p)^2\cdot p=C_3^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)^2\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{81}{512}$，

$P(X=3)=p^3+C_3^2p^2(1-p)\cdot p=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3+C_3^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{189}{256}$，

所以 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{13}{256}$ | $\dfrac{27}{512}$ | $\dfrac{81}{512}$ | $\dfrac{189}{256}$ |

则 $E(X)=0\times\dfrac{13}{256}+1\times\dfrac{27}{512}+2\times\dfrac{81}{512}+3\times\dfrac{189}{256}=\dfrac{1323}{512}$. ……………………………… 15 分

18.【解析】(1)因为 $P$ 为$\triangle ABC$的重心，且边 $AC$，$AB$ 上的两条中线长度之和为 $3\sqrt{6}$，

所以$|PB|+|PC|=\dfrac{2}{3}\times 3\sqrt{6}=2\sqrt{6}>|BC|$，

故由椭圆的定义可知 $P$ 的轨迹 $\Gamma$ 是以 $B(-2,0)$，$C(2,0)$为焦点的椭圆(不包括长轴的端点)，

且 $a=\sqrt{6}$，$c=2$，所以 $b=\sqrt{2}$，所以 $P$ 的轨迹 $\Gamma$ 的方程为$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1(x\neq\pm\sqrt{6})$. ……………………………… 5 分

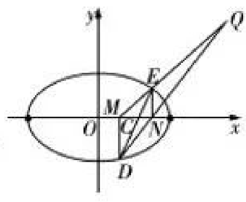
(2)①依题意，设直线 $DE$ 的方程为 $x=my+2(m\neq 0)$.

联立$\begin{cases}x=my+2,\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$得$(m^2+3)y^2+4my-2=0$，易知 $\Delta=16m^2+8(m^2+3)=24(m^2+1)>0$，

设 $D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\dfrac{4m}{m^2+3}$，$y_1\cdot y_2=-\dfrac{2}{m^2+3}$.

因为 $DM\perp x$ 轴，$EN\perp x$ 轴，所以 $M(x_1,0)$，$N(x_2,0)$.

所以直线 $DN$：$y=\dfrac{y_1}{x_1-x_2}(x-x_2)$，直线 $EM$：$y=\dfrac{y_2}{x_2-x_1}(x-x_1)$，




联立解得 $x_Q=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\dfrac{(my_1+2)y_2+(my_2+2)y_1}{y_1+y_2}=2+\dfrac{2my_1y_2}{y_1+y_2}=3$.

从而点 $Q$ 在定直线 $x=3$ 上. ……………………………………………………… 12 分

②因为 $S_{\triangle DEQ}=\dfrac{1}{2}|EN|\cdot|x_Q-x_1|=\dfrac{1}{2}|y_2|\cdot|3-x_1|=\dfrac{1}{2}|y_2-my_1y_2|$，

又$\dfrac{my_1y_2}{y_1+y_2}=\dfrac{1}{2}$，则 $S_{\triangle DEQ}=\dfrac{1}{2}\left|y_1-\dfrac{y_1+y_2}{2}\right|=\dfrac{1}{4}|y_1-y_2|=\dfrac{1}{4}\sqrt{(y_1-y_2)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+3}$，

设$\sqrt{m^2+1}=t>1$，则 $S_{\triangle DEQ}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{t}{t^2+2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{1}{t+\dfrac{2}{t}}\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

当且仅当 $t=\frac{2}{t}$，即 $m=\pm1$ 时，等号成立，故△$DEQ$ 面积的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$. ………………………………… 17 分

19.【解析】(1)对于函数 $f(x)=\tan x$，则 $f'(x)=1+\tan^2 x$，这两个函数的定义域都是$\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，所以 $f(x)$为“同定义函数”，此时，$g(x)=1+x^2$.

由函数的定义，对于 $x=\pm\frac{\pi}{4}$，$f(x)=h(f'(x))$无法同时成立.

所以 $f(x)$为“单向导函数”，其“自导函数”为 $g(x)=1+x^2$.

对于函数 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}$，这两个函数的定义域不同，所以不是“同定义函数”. ……………… 4 分

(2)若 $q$ 成立，$f(x)=ka^x$，则 $f'(x)=ka^x\ln a$，

设 $g(x)=x\ln a$，则 $f'(x)=g(f(x))$，所以 $f(x)$为“单向导函数”.

又设 $h(x)=\frac{x}{\ln a}$，则 $f(x)=h(f'(x))$，所以 $f(x)$为“双向导函数”.

但 $g(x)$不是常值函数，故 $p$ 不是 $q$ 的必要条件.

若 $p$ 成立，则 $g(x)=m$，所以 $f'(x)=g(f(x))=m$，所以 $f(x)=mx+n$，所以 $q$ 不成立.

所以 $p$ 为 $q$ 的既不充分也不必要条件. ……………………………………………………………………… 8 分

(3)①由题意，$f'(x)=(ax^{a-1}+x^a-b)e^x$，且$(ax^{a-1}+x^a-b)e^x=(x^a-b)e^x$，

所以 $ax^{a-1}=0$，所以 $a=0$； …………………………………………………………………………… 10 分

②由题意，$I(x)=(x-1)e^{2x}-\frac{4}{3}kx^3+kx$，所以 $I'(x)=(2x-1)e^{2x}-4kx^2+k$，$I'\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

令 $p(x)=(2x-1)e^{2x}-4kx^2+k$，$x\in[0,k]$，$k\in[1,2]$，$p(1)=e^2-3k>0$，则 $p'(x)=4xe^{2x}-8kx=4x(e^{2x}-2k)$，

因为 $y=e^{2x}-2k$ 单调递增，且 $y|_{x=0}=1-2k<0$，$y|_{x=k}=e^{2k}-2k>0$，

所以存在 $x_0=\frac{1}{2}\ln 2k\in(0,k)$，使得 $e^{2x_0}-2k=0$.

且当 $x\in[0,x_0]$时，$p'(x)$[illegible]单调递增；

(i)当 $x_0=\frac{1}{2}\ln 2k=\frac{1}{2}$，即 [illegible] $+k=-k(2x_0-1)^2=0$，

此时 $I'(x)\geqslant0$，$I(x)$在 $x\in$ [illegible].

(ii)当 $k=1$ 时，$p(0)=-1$ [illegible].

所以当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$时，$I'(x)\leqslant0$，$I(x)$单调递减；当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$时，$I'(x)\geqslant0$，$I(x)$单调递增；

又 $I(k)=I(1)>I(0)$，所以 $I(x)_{\max}=I(k)$；

(iii)当 $k\in(1,2]$且 $k\neq\frac{e}{2}$时，$p(x)_{\min}=-k(2x_0-1)^2<0$，$p(0)>0$，所以函数 $I(x)$在(0,1)上存在两个极值点，

若 $x_0=\frac{1}{2}\ln 2k>\frac{1}{2}$，即$\frac{e}{2}<k\leqslant2$ 时，极大值点为$\frac{1}{2}$；

若 $x_0=\frac{1}{2}\ln 2k<\frac{1}{2}$，即 $1<k<\frac{e}{2}$时，极大值点 $x_1<\frac{1}{2}$；

$I(x)_{\max}$为函数极大值或 $I(k)$，

又当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$时，$I(x)=(x-1)e^{2x}-\frac{4}{3}kx^3+kx\leqslant-1+\frac{1}{2}k\leqslant0$，$I(k)=(k-1)e^{2k}-\frac{4}{3}k^4+k^2$，

令 $t(k)=(k-1)e^{2k}-\frac{4}{3}k^4+k^2$，$k\in[1,2]$，则 $t'(k)=(2k-1)e^{2k}-\frac{16}{3}k^3+2k$，$k\in[1,2]$，

设 $s(k)=(2k-1)e^{2k}-\frac{16}{3}k^3+2k$，$k\in[1,2]$，则 $s'(k)=4ke^{2k}-16k^2+2=4k(e^{2k}-4k)+2>0$，

所以 $s(k)$即 $t'(k)$单调递增，所以 $t'(k)\geqslant t'(1)=e^2-\frac{16}{3}+2>0$，

所以 $t(k)$单调递增，所以 $t(k)\leqslant t(2)=e^4-\frac{52}{3}$，$e^4-\frac{52}{3}>0$，

综上，$I(x)_{\max}=e^4-\frac{52}{3}\leqslant c$，所以 $c$ 的取值范围为$\left[e^4-\frac{52}{3},+\infty\right)$. …………………………………………… 17 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线