

大联考雅礼中学 2024 届高三月考试卷(四)

数 学

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分,共8页.时量120分钟,满分150分.

第I卷

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

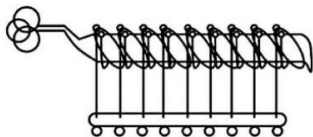
1.已知集合 $A = \{x|x^2 \leq 1\}$, $B = \{y|y \geq -1\}$, 则 $A \cap B =$

- A. ϕ B. $[-1, 1]$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[-1, 1)$

2.已知复数 z 满足 $(1-i)^2 z = 2-4i$, 其中 i 为虚数单位, 则复数 z 的虚部为

- A. 1 B. -1 C. i D. $-i$

3.如图所示,九连环是中国传统民间智力玩具,以金属丝制成9个圆环,解开九连环共需要256步,解下或套上一个环算一步,且九连环的解下和套上是一对逆过程.九连环把玩时按照一定的程序反复操作,可以将九个环全部从框架上解下或者全部套上.将第 n 个圆环解下最少需要移动的次数记为 a_n ($n \leq 9, n \in N^*$).已知 $a_1 = 1, a_2 = 1$, 按规则有 $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1$ ($n \geq 3, n \in N^*$), 则解下第4个圆环最少需要移动的次数为

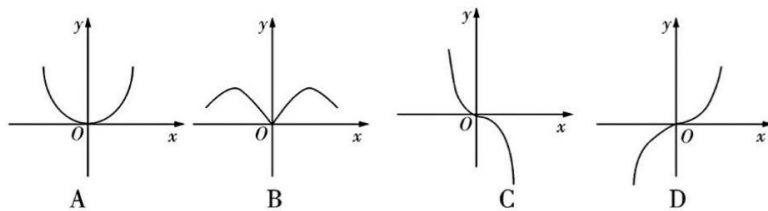


- A. 31 B. 16 C. 11 D. 7

4.二项式 $(x - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中 x^4 的系数与 x^6 的系数之比为

- A. B. -6 C. 15 D. -15

5. 函数 $f(x) = \frac{x(e^{-x} + e^x)}{2 + \cos x}$ 的部分图象大致为



6. 已知定义域是 R 的函数 $f(x)$ 满足: $\forall x \in R, f(4+x) + f(-x) = 0, f(1+x)$ 为偶函数, $f(1) = 1$, 则 $f(2023) =$

- A. -1 B. 1 C. 2 D. -3

7. 若点 G 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 且 $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$, H 是直线 BG 上一点, $\vec{AH} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, 则 $x^2 + 4y^2$ 的最小值是

A.2 B.1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

8. 已知 $a = e^{0.05}$, $b = \frac{\ln 1.1}{2} + 1$, $c = \sqrt{1.1}$, 则

A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $b > a > c$ D. $a > c > b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列结论正确的是

A. 若随机变量 ξ , η 满足 $\eta = 2\xi + 1$, 则 $D(\eta) = 2D(\xi) + 1$

B. 若随机变量 $\xi \sim N(3, \sigma^2)$, 且 $P(\xi < 6) = 0.84$, 则 $P(3 < \xi < 6) = 0.34$

C. 若样本数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ 线性相关, 则用最小二乘估计得到的经验回归直线经过该组数据的中心点 (\bar{x}, \bar{y})

D. 根据分类变量 X 与 Y 的成对样本数据, 计算得到 $\chi^2 = 4.712$. 依据 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验 ($\chi_{0.05}^2 = 3.841$), 可判断 X 与 Y 有关

10. 已知函数 $f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$, 则下列结论正确的是

A. $f(x)$ 的最大值为 2

B. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增

C. $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有 4 个零点

D. 把 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 对称

11. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上三点 $A(x_1, y_1), B(1, 2), C(x_2, y_2)$, 点 F 为抛物线的焦点, 则

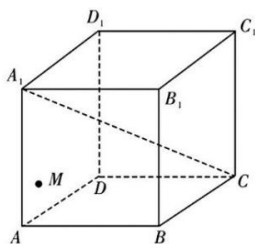
A. 抛物线的准线方程为 $x = -1$

B. 若 $\vec{FA} + \vec{FB} + \vec{FC} = \vec{0}$, 则 $|\vec{FA}|, |\vec{FB}|, |\vec{FC}|$ 成等差数列

C. 若 A, F, C 三点共线, 则 $y_1 y_2 = -1$

D. 若 $|AC| = 6$, 则 AC 的中点到 y 轴距离的最小值为 2

12. 如图, 点 M 是正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中的侧面 ADD_1A_1 (包含边界) 上的一个动点, 则下列结论正确的是



A. 点 M 存在无数个位置满足 $CM \perp AD_1$

B. 若正方体的棱长为 1, 三棱锥 $B - C_1MD$ 的体积最大值为 $\frac{1}{3}$

C. 在线段 AD_1 上存在点 M, 使异面直线 B_1M 与 CD 所成的角是: 30°

D. 点 M 存在无数个位置满足到直线 AD 和直线 C_1D_1 的距离相等

数学试题(雅礼版) 第 2 页(共 4 页)

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

第II卷

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知 $\sin(\alpha + \pi) = 4\cos\alpha$, 则 $\tan 2\alpha =$ _____.

14. 某校安排高一年级(1)~(5)班共 5 个班去 A, B, C, D 四个劳动教育基地进行社会实践, 每个班去一个基地, 每个基地至少安排一个班, 则高(1)班被安排到 A 基地的排法总数为 _____ 种.

15. 已知 O 为坐标原点, 点 P 在单位圆上, 过点 P 作圆 $C: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ 的切线, 切点为 Q, 则 |PQ| 的最小值为 _____.

16. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, P 为双曲线 C 上的动点, $|F_1F_2| = 10, |PF_1| - |PF_2| = 6$, 点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离分别为 d_1, d_2 , 则 $\sqrt{d_1d_2} =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

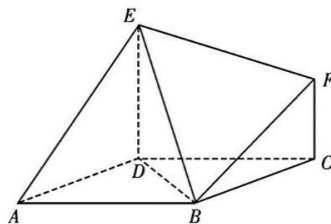
在学校大课间体育活动中, 甲、乙两位同学进行定点投篮比赛, 每局比赛甲、乙每人各投一次, 若一方命中且另一方未命中, 则命中的一方本局比赛获胜, 否则为平局, 已知甲、乙每次投篮命中的概率分别为 $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{3}{4}$, 且每局比赛甲、乙命中与否互不影响, 各局比赛也互不影响.

- (1) 求 1 局投篮比赛, 甲、乙平局的概率;
- (2) 设共进行了 10 局投篮比赛, 其中甲获胜的局数为 X, 求 X 的数学期望 E(X).

18. (本小题满分 12 分)

如图, 底面 ABCD 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $DE \perp$ 平面 AB-CD, $CF \parallel DE, DE = 2CF$, BE 与平面 ABCD 所成的角为 45° .

- (1) 求证: 平面 BEF \perp 平面 BDE;
- (2) 求二面角 B - EF - D 的余弦值.



数学试题(雅礼版) 第 3 页(共 4 页)

19.(本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 = 20, S_n = 4n^2 + kn$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 3, b_n - b_{n-1} = a_{n-1} (n \geq 2)$, 求数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

20.(本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $a + b = c \cos B + \sqrt{3} c \sin B$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 D 是 AB 边上一点, 且 $AD = 2DB$, 若 $CD = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

21.(本小题满分 12 分)

设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A, B 是该椭圆 C 的右顶点和上顶点, 且 $|AB| = \sqrt{5}$, 若该椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 且与 x 轴交于点 $D(x_0, 0) (x_0 > a)$. 若直线 PF_2 与直线 QF_2 的倾斜角互补, 求 $\triangle PQF_2$ 的面积的最大值.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ 有两个零点.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $f'(x_1 \cdot x_2) < 1 - a$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

