

## 理科数学试卷

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $z=1+i$ , 则  $\frac{z}{z-i} =$ 

A.  $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$       B.  $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$       C.  $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$       D.  $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$
2. 已知集合  $A = \{x | x^2 - x - 12 < 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} | x < 5\}$ , 则  $A \cap B =$ 

A.  $\{0, 1, 2\}$       B.  $\{1, 2, 3\}$       C.  $\{0, 1, 2, 3\}$       D.  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
3. 命题“ $\forall x > 0, \cos x > -\frac{1}{2}x^2 + 1$ ”的否定是

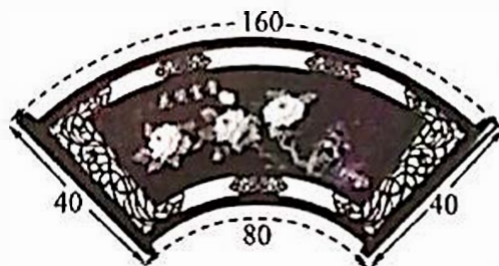
A.  $\forall x > 0, \cos x \leq -\frac{1}{2}x^2 + 1$       B.  $\forall x \leq 0, \cos x > -\frac{1}{2}x^2 + 1$

C.  $\exists x_0 > 0, \cos x_0 \leq -\frac{1}{2}x_0^2 + 1$       D.  $\exists x_0 \leq 0, \cos x_0 \leq -\frac{1}{2}x_0^2 + 1$
4.  $\sin 160^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \cos 50^\circ =$ 

A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $-\frac{1}{2}$       D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. 已知函数  $f(x) = x \ln x^2 - x + 1$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(e, f(e))$  处的切线方程为

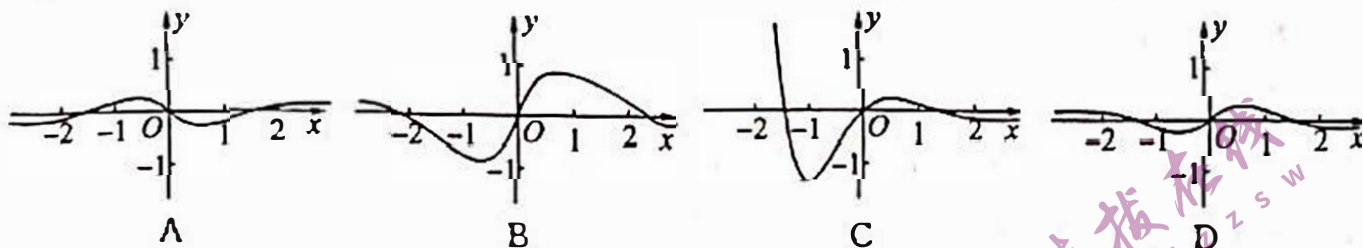
A.  $3x - y - 2e + 1 = 0$       B.  $(e-1)x + ey - 2e^2 - e = 0$

C.  $(e+1)x - ey = 0$       D.  $3x - y - 3e + 1 = 0$
6. 玉雕在我国历史悠久,拥有深厚的文化底蕴,数千年来始终以其独特的内涵与魅力深深吸引着世人。玉雕壁画是采用传统的手工雕刻工艺,加工生产成的玉雕工艺画。某扇形玉雕壁画尺寸(单位: cm)如图所示,则该壁画的扇面面积约为



- A.  $1\ 600\ \text{cm}^2$       B.  $3\ 200\ \text{cm}^2$       C.  $3\ 350\ \text{cm}^2$       D.  $4\ 800\ \text{cm}^2$

7. 函数  $f(x) = \frac{x \cdot \cos x}{e^{|x|}}$  的图象大致为



8. 下列各命题中,  $p$  是  $q$  的充分不必要条件的是

A.  $p: \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{y}}, q: \ln x > \ln y$

B. 已知  $a \in \mathbb{R}$ ,  $p$ : 直线  $2x + ay + 3 = 0$  与直线  $ax + 8y + 6 = 0$  平行,  $q: a = 4$  或  $-4$

C. 已知  $a \in \mathbb{R}$ ,  $p: -2 < a < 4$ ,  $q: f(x) = 2x^2 - 2ax + a + 4$  有两个零点

D. 已知  $a > 0, b > 0$ ,  $p: a + b > 6$ ,  $q: a > 3$  且  $b > 3$

9. 已知点  $A$  是函数  $f(x) = x^2 - \ln x + 2$  图象上的点, 点  $B$  是直线  $y = x$  上的点, 则  $|AB|$  的最小值为

A.  $\sqrt{2}$

B. 2

C.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

D.  $\frac{16}{3}$

10. 如图, 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $b^2 = ac, B = \frac{\pi}{3}$ ,

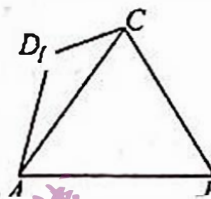
$D$  是  $\triangle ABC$  外一点,  $AD = 3, CD = 2$ , 则四边形  $ABCD$  面积的最大值是

A.  $\frac{13\sqrt{3}}{2} + 6$

B.  $\frac{13\sqrt{3}}{4} + 6$

C.  $\frac{13\sqrt{3}}{6} + 4$

D.  $\frac{13\sqrt{3}}{2} + 4$



11. 已知在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC = 2, BC = 3$ , 点  $E$  是边  $BC$  上的动点, 则当  $\vec{EA} \cdot \vec{EB}$  取得最小值时,  $|\vec{EA}| =$

A.  $\frac{\sqrt{37}}{4}$

B.  $\frac{\sqrt{37}}{2}$

C.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{14}}{2}$

12. 已知  $a > 0, b > 0, \ln a = \frac{\ln b}{2} = \frac{\ln(3a + 2b)}{3}$ , 则下列说法正确的是

A.  $b = 2a$

B.  $3a + 2b = b^3$

C.  $\frac{\ln b}{\ln(a+1)} = \log_2 3$

D.  $e^{\frac{\ln b}{a}} = 3$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知复平面中第四象限内的点  $Z$  所对应的复数为  $z = 2 + ai$ , 且  $|z| = 5$ , 则实数  $a$  的值为 \_\_\_\_\_.

14. 已知  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$ , 则  $\sin\left(\frac{5\pi}{6} + 2\alpha\right) =$  \_\_\_\_\_.

15. 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 6, AD = 4$ ,  $E$  为  $CD$  的中点, 若  $\vec{EF} = 2\vec{FB}, \vec{AF} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AD}$ , 则  $\lambda + \mu =$  \_\_\_\_\_.

16. 已知关于  $x$  的不等式  $2\ln x + ax - 2x^2 \leq 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:60 分。

17.(12 分)

已知向量  $a$  与  $b$  的夹角为  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $a \cdot b = -2$ ,  $|a| = 1$ .

- (1)求  $|b|$  的大小及  $b$  在  $a$  方向上的投影;
- (2)求向量  $b$  与  $2a - b$  夹角的余弦值.

18.(12 分)

已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega \in \mathbb{N}^+$ ,  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象关于  $x = -\frac{5\pi}{12}$  对称,且在区间  $(-\frac{5\pi}{12}, 0)$  上单调递增.

(1)求函数  $f(x)$  的解析式;

(2)若  $f(\frac{\pi}{2}) < 0$ ,将函数  $f(x)$  图象上所有点的横坐标变为原来的  $\frac{1}{2}$ ,纵坐标变为原来的

2 倍得到  $g(x)$  的图象.当  $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$  时,求  $g(x)$  的值域.

19.(12 分)

随着我国经济发展、医疗消费需求增长、人们健康观念转变以及人口老龄化进程加快等因素的影响,医疗器械市场近年来一直保持了持续增长的趋势.某医疗器械公司为了进一步增加市场竞争力,计划改进技术生产某产品.已知生产该产品的年固定成本为 300 万元,最大产能为 100 台.每

生产  $x$  台,需另投入成本  $G(x)$  万元,且  $G(x) = \begin{cases} 2x^2 + 80x, & 0 < x \leq 40, \\ 201x + \frac{3600}{x} - 2100, & 40 < x \leq 100, \end{cases}$  由市

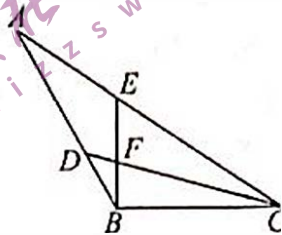
市场调研知,该产品每台的售价为 200 万元,且全年内生产的该产品当年能全部销售完.

- (1)写出年利润  $W(x)$  万元关于年产量  $x$  台的函数解析式(利润 = 销售收入 - 成本);
- (2)当该产品的年产量为多少时,公司所获利润最大? 最大利润是多少?



20.(12分)

如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\cos \angle ABC = -\frac{5}{27}$ , $AC = 10$ , $BC = 3$ ,点 $D, E$ 分别在边 $AB, AC$ 上,且 $AD = 2DB$ , $BE \perp BC$ , $BE$ 与 $CD$ 交于点 $F$ .  
求:(1) $\triangle ABC$ 的面积;  
(2) $CF$ 的长.



21.(12分)

已知函数  $f(x) = x^2 e^x + \frac{1}{2}ax^2 + 2ax - 3$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

(1)当  $a = -e$  时,求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2)证明:当  $a \geq 1$  时,  $f(x) - \frac{4}{e^2} \geq 2a \ln a - a^2 - 4a$ .

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系  $xOy$  中,曲线  $C$  的普通方程为  $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ ,以坐标原点为极点, $x$ 轴正半轴为

极轴,建立极坐标系,直线  $l$  的极坐标方程为  $2\sqrt{2} \cos \theta + \sin \theta = \frac{6}{\rho}$ .

(1)求直线  $l$  的直角坐标方程,并写出曲线  $C$  的一个参数方程;

(2)已知  $M$  是曲线  $C$  上的点,求点  $M$  到直线  $l$  的距离的最小值.

23.[选修4-5:不等式选讲](10分)

设函数  $f(x) = |x+1| - 2|x-2|$  的最大值为  $t$ .

(1)解不等式  $f(x) \geq 2$ ;

(2)若  $2a^2 + 5b^2 + 3c^2 = t$ ,求  $2ab + 3bc$  的最大值.