2023-2024 学年高三上学期期末广东省深圳市龙岗区期末质量监测数学试题

1. 【答案】C

【解析】

【分析】解不等式求得集合 A,进而求得 $A\cap B$.

【详解】$x^2<2,x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})<0$,

解得 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$,所以 $A=\{x|-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\}$,

所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$.

故选:C

2. 【答案】C

【解析】

【分析】根据复数代数形式的乘法运算化简复数 z^2,再根据复数的几何意义判断即可.

【详解】解:因为 $z=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$,所以 $z^2=(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^2=1-2\sqrt{3}\mathrm{i}+(\sqrt{3}\mathrm{i})^2=-2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$,

所以 z^2 在复平面内对应的点的坐标为 $(-2,-2\sqrt{3})$ 位于第三象限.

故选:C

3. 【答案】B

【解析】

【分析】

利用等差数列的性质求出 a_4 的值,然后利用等差数列求和公式以及等差中项的性质可求出 S_7 的值.

【详解】由等差数列的性质可得 $a_6+a_3-a_5=a_4+a_5-a_5=3$,

$\therefore S_7=\dfrac{7(a_1+a_7)}{2}=\dfrac{7\times 2a_4}{2}=7\times 3=21$.

故选:B.

【点睛】本题考查等差数列基本性质的应用,同时也考查了等差数列求和,考查计算能力,属于基础题.

4. 【答案】D

【解析】

【分析】先由 $\sin 2\alpha=\dfrac{1}{3}$,得 $2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$,再利用 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$,结合正弦的和角公式可求得答案.

【详解】解:由 $\sin 2\alpha=\dfrac{1}{3}$,得 $2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$,则 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$,

又 $\alpha\in(0,\pi)$, $2\sin\alpha\cos\alpha>0$,所以 $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$,所以 $\sin\alpha+\cos\alpha>0$,则 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

又 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

故选:D.

5. 【答案】D

【解析】

【分析】根据条件 $\lg 5^a=\lg 10^b$,然后化简可得 $\dfrac{b}{a}$

【详解】$\because\ 5^a=10^b$,

$\therefore \lg 5^a=\lg 10^b$,

$\therefore a\lg 5=b$,

$\therefore \frac{b}{a}=\lg5=1-\lg2.$

故选：D.

6. 【答案】B

【解析】

【分析】根据题意得到 $|AC|$ 最小时，$|AB|$ 最小，先求出 $|AC|$ 最小值，再利用 $|AB|=\sqrt{|AC|^2-4}$ 计算出结果.

【详解】设圆 $x^2+y^2=1$ 与圆 $(x-4)^2+y^2=4$ 的圆心分别为 O，C，则 $|AB|=\sqrt{|AC|^2-4}$，当 $|AC|$ 最小时，$|AB|$ 最小，由于点 A 在圆 O 上，则 $|AC|$ 的最小值为 $|OC|-1=4-1=3$，所以 $|AB|$ 的最小值为 $\sqrt{5}$.

故选：B.

7. 【答案】A

【解析】

【分析】先求出函数的定义域，然后根据偶函数的定义取特殊值求解

【详解】函数的定义域为 $\{x|x\neq0\}$，

因为函数 $f(x)=x\left(1+\frac{m}{1-e^x}\right)$ 是偶函数，

所以 $f(-1)=f(1)$，

所以 $-\left(1+\frac{m}{1-e^{-1}}\right)=1\times\left(1+\frac{m}{1-e}\right)$，

$-1-\frac{me}{e-1}=1+\frac{m}{1-e}$，所以 $\frac{m(e-1)}{1-e}=2$，

得 $m=-2$，

故选：A

8. 【答案】A

【解析】

【分析】根据异面直线所成角、锥体体积公式等知识求得正确答案.

【详解】因为异面直线所成角的范围是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，故当 $C'B\perp AD$ 时，$C'B$ 与 AD 所成角最大，

因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB\perp AD$，

而 $AB\cap C'B=B, AB, C'B\subset$ 平面 ABC'，所以 $AD\perp$ 平面 ABC'，

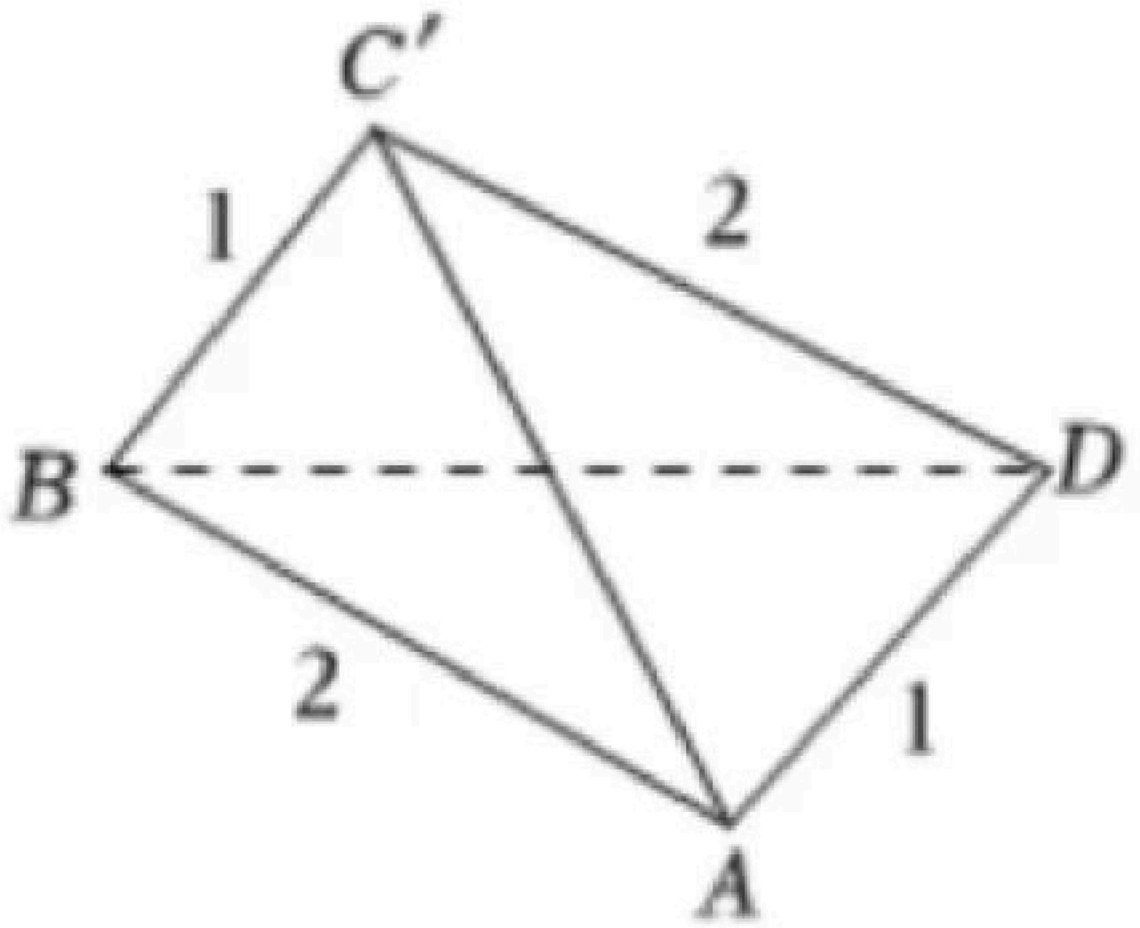
因为 $AC'\subset$ 平面 ABC'，所以 $AD\perp AC'$，

在直角三角形 ADC' 中，$AD=1, C'D=2, AC'=\sqrt{3}$，

而 $BC'=1, AB=2, BC'^2+AC'^2=AB^2$，所以 $BC'\perp AC'$，

所以 $V_{C'-ABD}=V_{D-ABC'}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC'}\cdot AD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

故选：A



【点睛】异面直线所成角 的 范围是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$，当两条直线所成角为 0 时，两直线平行或重合. 求解锥体体积的问题，可以考虑利用转换定点的方法，然后利用体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$ 来求得三棱锥的体积.

9. 【答案】BCD

【解析】

【分析】选项 A，取 $x=1$ 验证即可，选项 B 二项式系数和为 2^n 验证即可，利用二项式展开式的通项求解即可，利用 C 选项的展开式通项公式验证即可.

【详解】A 选项：取 $x=1$. 有 $(-1)^8=1$，A 错，

B 选项：展开式二项式系数和为 $2^8=256$，B 对，

C 选项：由 $T_{k+1}=C_8^k(x^2)^{8-k}(-2x^{-1})^k=(-2)^kC_8^kx^{16-3k}(k=0,1,2\cdots\cdots 8)$，

则 $k=4$ 时即为第 5 项为 $(-2)^4C_8^4x^4=1120x^4$，C 对，

D 选项：由 C 选项可知 $16-3k\neq 0$ 恒成立，D 对，

故选：BCD.

10. 【答案】ACD

【解析】

【分析】根据向量的计算求 $|\vec{a}|$，判断选项 A；利用数量积的运算，判断选项 B；求出 $|\vec{b}|$，求解 $\vec{a},\vec{b}$，判断选项 C；根据投影向量计算公式，判断选项 D.

【详解】对于选项 A，$\vec{e_1},\vec{e_2}$ 是夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的单位向量，

则 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{e_1}^2+4\vec{e_2}^2-4\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}}=\sqrt{1+4-4\times1\times1\times\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，

故 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，故选项 A 正确；

对于选项 B，$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{e_1}-2\vec{e_2})\cdot(\vec{e_1}+\vec{e_2})=\vec{e_1}^2-\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}-2\vec{e_2}^2=1-1\times1\times\frac{1}{2}-2\times1=-\frac{3}{2}$，

故选项 B 错误；

对于选项 C，$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{e_1}^2+\vec{e_2}^2+2\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}}=\sqrt{1+1+2\times1\times1\times\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，

所以 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$，

又 $0\leqslant\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\leqslant\pi$，所以 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{2\pi}{3}$，故选项 C 正确；

对于选项 D，$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $-\frac{1}{2}\vec{b}$，故选项 D 正确.

故选：ACD

11. 【答案】AB

【解析】

【分析】A 选项，根据分层抽样的定义和概率性质得到答案；B 选项，根据平均数公式得到方程，求出 $m=4$，再利用方差公式计算出结果；C 选项，先对数据从小到大排序，再根据百分位数定义计算即可；D 选项，先得到 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的方差，根据方差性质得到 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_{10}-1$ 的方差，进而得到其标准差.

【详解】A 选项，个体 m 被抽到的概率为 $\frac{6}{60}=0.1$，A 正确；

B 选项，已知一组数据 1，2，m，6，7 的平均数为 4，则 $\frac{1+2+m+6+7}{5}=4$，

解得 $m=4$，

$\frac{(1-4)^2+(2-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2}{5}=\frac{26}{5}$，

则这组数据的方差是 $\frac{26}{5}$，B 正确；

C 选项，数据 13，27，24，12，14，30，15，17，19，23 共 10 个数，

从小到大排列为 12，13，14，15，17，19，23，24，27，30，

由于 $10\times0.7=7$，故选择第 7 和第 8 个数的平均数作为第 70 百分位数，

即 $\frac{23+24}{2}=23.5$，所以第 70 百分位数是 23.5，C 错误；

D 选项，若样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的标准差为 8，则 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的方差为 64，

设 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的平均数为 $\bar{x}$，则 $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=10\bar{x}$，

$\frac{1}{10}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_{10}-\bar{x})^2]=64$，

又 $\frac{2x_1-1+2x_2-1+\cdots+2x_{10}-1}{10}=\frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_{10})-10}{10}=2\bar{x}-1$，

故 $\frac{(2x_1-1-2\bar{x}+1)^2+\cdots+(2x_{10}-1-2\bar{x}+1)^2}{10}=\frac{4[(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_{10}-\bar{x})^2]}{10}=256$，

则 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_{10}-1$ 的标准差为 $\sqrt{256}=16$，D 错误.

故选：AB

12. 【答案】ACD

【解析】

【分析】设出直线 MN,AB 的方程，分别与抛物线联立，利用韦达定理及抛物线焦半径公式，对选项逐一计算可得结果

【详解】由抛物线 $y^2=4x$ 得 $F(1,0)$，设直线 MN:$x=ty+1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y^2=4x\\x=ty+1\end{cases}$，消去 x 可得 $y^2-4ty-4=0$，则 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$，

选项 A：$|MN|=x_1+x_2+p=t(y_1+y_2)+2+p=4t^2+4\geqslant4$，故 A 正确；

选项 B：因为 $x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{16}=1$，所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=1-4=-3$，故 B 错误；

由抛物线 $y^2=4x$ 得准线为 $x=-1$，则 $P(-1,0)$，因为过点 P 的直线与抛物线交于点 A，B，所以直线 AB 斜率存在且不为零，故设直线 AB:$x=my-1$，$A(x_3,y_3)$，$B(x_4,y_4)$，

联立 $\begin{cases}y^2=4x\\x=my-1\end{cases}$，消去 x 可得 $y^2-4my+4=0$，则 $y_3+y_4=4m$，$y_3y_4=4$，

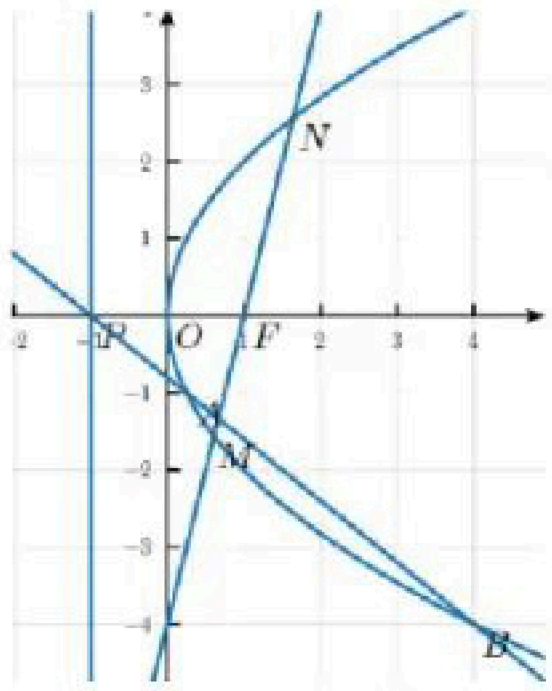
故 $x_3x_4=\frac{y_3^2y_4^2}{16}=1$，$x_3>0$，$x_4>0$，$x_3\neq x_4$，

选项 C：$|OA|^2+|OB|^2=x_3^2+y_3^2+x_4^2+y_4^2>2x_3x_4+2y_3y_4=10$，故 C 正确；

选项 D：$|AF|+|BF|=x_3+x_4+p>2\sqrt{x_3x_4}+2=4$，又 $|PF|=2$，

所以 $|AF|+|BF|>2|PF|$，故 D 正确；

故选：ACD.



【点睛】本题关键利用直线与抛物线相交，联立方程，由韦达定理及焦半径公式可解.

13. 【答案】π

【解析】

【详解】试题分析：由 $y=\cos^2x=\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{2}$，得函数的最小正周期为 π.

考点：三角函数的周期.

14. 【答案】180

【解析】

【分析】根据分组分配办法结合分步乘法原理求解即可.

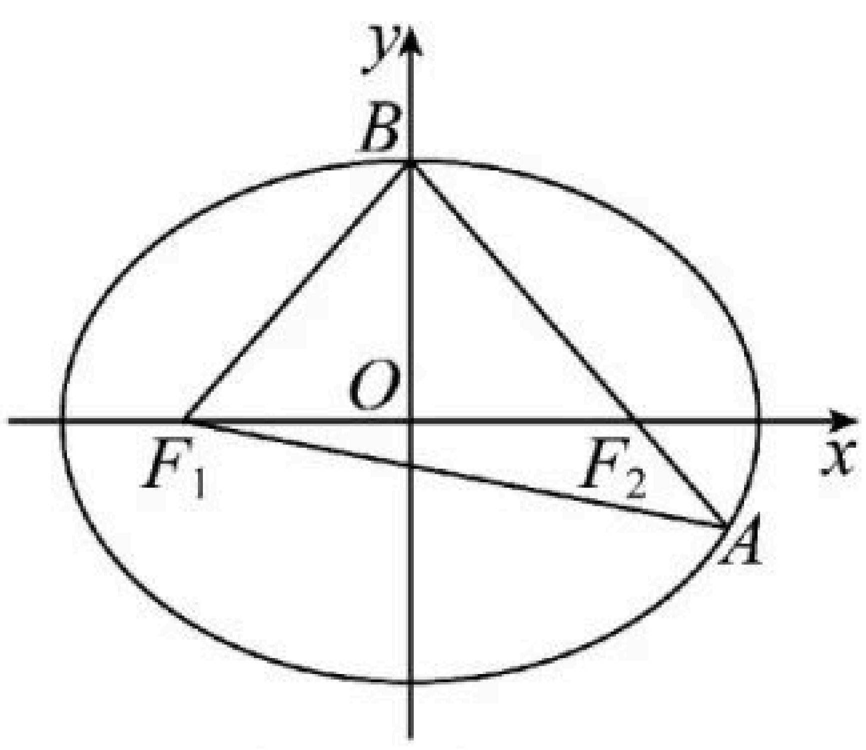
【详解】第一步，先从 6 人中任选 2 人承担任务甲，有 C_6^2 种选法，

15. 【答案】$\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】根据所给线段的长度关系及椭圆的定义，求出 $\triangle ABF_1$ 的边长，利用余弦定理求 $\cos B$，在 $\triangle F_2BF_1$ 中再由余弦定理即可求出离心率.

【详解】如图，



因为 $3\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$，所以可设 $|AF_2|=2t,|F_2B|=3t$，

又 $|AF_1|=2|AF_2|$，所以 $|AF_1|=4t$，

由椭圆定义，$|AF_1|+|AF_2|=6t=2a$，即 $t=\frac{a}{3}$，

又 $|BF_1|=2a-|BF_2|=2a-a=a$，即 B 点为短轴端点，

所以在 $\triangle ABF_1$ 中，

$$\cos B=\frac{|BF_1|^2+|BA|^2-|AF_1|^2}{2|BF_1|\cdot|BA|}=\frac{a^2+\left(a+\frac{2a}{3}\right)^2-\left(\frac{4a}{3}\right)^2}{2a\cdot\frac{5a}{3}}=\frac{3}{5},$$

又在 $\triangle F_2BF_1$ 中，$\cos B=\frac{|BF_1|^2+|BF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|BF_1|\cdot|BF_2|}=\frac{2a^2-4c^2}{2a\cdot a}=1-2e^2=\frac{3}{5}$，

解得 $e=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $e=-\frac{\sqrt{5}}{5}$(舍去).

故答案为：$\frac{\sqrt{5}}{5}$

16. 【答案】$(1,+\infty)\cup\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$

【解析】

【分析】首先注意到$f(0)=0$,则$f(x)$已经有一个零点了,再讨论一下单调性即可.

【详解】首先注意到$f(0)=0$,当$a>1$时,函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,显然满足题设;

当$0<a<1$时,$f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)$,显然函数$f'(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,

由于$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\to-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$,

故$f'(x)$存在唯一零点,若$f(x)$只有一个零点$x=0$,此时也必为极值点,

又此时$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$,则只需$f'(0)=\ln a+\ln(1+a)=0$,

$\ln(1+a)=-\ln a=\ln\dfrac{1}{a}\Rightarrow 1+a=\dfrac{1}{a}$, $a^2+a-1=0, a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$,因为$0<a<1$解得$a=$

$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$;

综上所述,则实数a的取值范用为$(1,+\infty)\cup\left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$.

故答案 为:$(1,+\infty)\cup\left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$

17. 【答案】17. $\dfrac{\pi}{3}$　　$3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 法一:由余弦定理得$a^2+c^2-b^2=ac$,再由余弦定理可得答案;法二:由正弦定理可得答案;

(2) 利用余弦定理可得a,再由$\dfrac{1}{2}ac\sin B$可得答案.

【小问 1 详解】

法一:因为$\cos A=\dfrac{2c-a}{2b}$,所以$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{2c-a}{2b}$,

整理得$a^2+c^2-b^2=ac$,

所以$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$,

又因为$B\in(0,\pi)$,所以$B=\dfrac{\pi}{3}$;

法二:因$\cos A=\dfrac{2c-a}{2b}$,所以$2b\cos A=2c-a$,由正弦定理得

$2\cos A\sin B=2\sin(A+B)-\sin A=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B-\sin A$,

整理得$2\sin A\cos B-\sin A=0$,

因为$\sin A>0$,所以$\cos B=\dfrac{1}{2}$,

又因为$B\in(0,\pi)$,所以$B=\dfrac{\pi}{3}$;

【小问 2 详解】

因为$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, $c=3$, $b=\sqrt{13}$,

所以$13=2^2+9-3a$,即$a^2-3a-4=0$,解得$a=4$,

所以$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

18. 【答案】(1) 证明见解析

(2) $\dfrac{\sqrt{105}}{15}$

【解析】

【分析】(1) 根据线面垂直的性质可得$PC\perp AC$, $PC\perp AB$,再利用勾股定理证明$AB\perp BC$,即可得证;

(2) (方法一) 以B为坐标原点,建立空间直角坐标系,利用向量法求解即可.

(方法二) 过点 C 作 $CN\perp PB$,垂足为 N,连接 MN,证明 $CN\perp$ 平面 PAB,则 $\angle CMN$ 为 CM 与平面 PAB 所成角的平面角,再解 $Rt\triangle CMN$ 即可.

【小问 1 详解】

因为 $PC\perp$ 平面 ABC, $AC\subset$ 平面 ABC,所以 $PC\perp AC$,

又 $PC=4$, $PA=2\sqrt{6}$,

所以 $AC=2\sqrt{2}$,

在 $\triangle ABC$ 中,因为 $AB=BC=2$,所以 $AB^2+BC^2=AC^2$,所以 $AB\perp BC$,

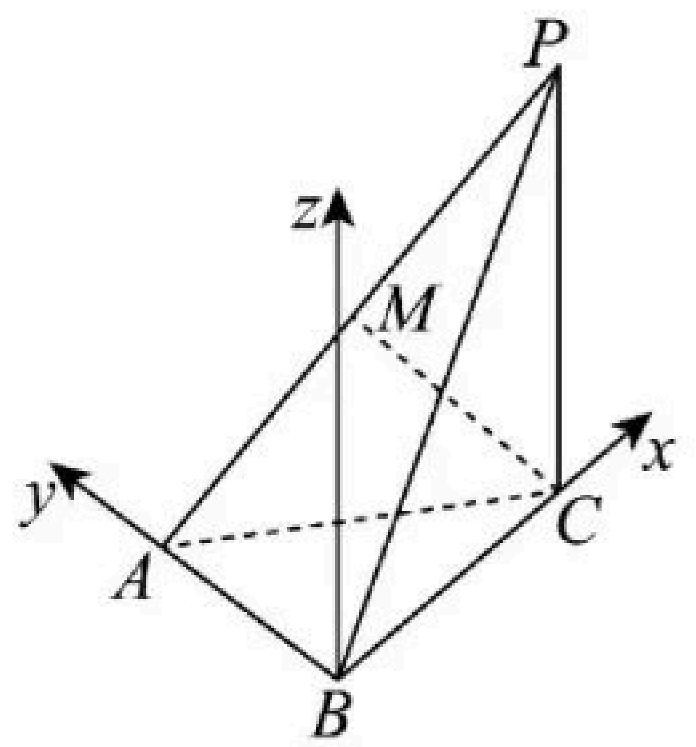
因为 $PC\perp$ 平面 ABC, $AB\subset$ 平面 ABC,所以 $PC\perp AB$,

又因为 $PC\cap BC=C,PC,BC\subset$ 平面 PBC,

所以 $AB\perp$ 平面 PBC;

【小问 2 详解】

(方法一) 如图,以 B 为坐标原点,建立空间直角坐标系,



则 $B(0,0,0)$, $A(0,2,0)$, $P(2,0,4)$, $C(2,0,0)$, $M(1,1,2)$,

所以 $\overrightarrow{CM}=(-1,1,2)$, $\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{BP}=(2,0,4)$,

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}2y=0\\ 2x+4z=0\end{cases}$,

令 $x=2$,则 $z=-1$,所以 $\vec{n}=(2,0,-1)$,

设 CM 与平面 PAB 所成角为 θ,

则 $\cos\langle\overrightarrow{CM},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{CM}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CM}||\vec{n}|}=\dfrac{-2-2}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\dfrac{-2\sqrt{30}}{15}$,

$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{CM},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{2\sqrt{30}}{15}$, $\therefore\cos\theta=\dfrac{\sqrt{105}}{15}$,

即 CM 与平面 PAB 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{105}}{15}$.

(2) (方法二) 过点 C 作 $CN\perp PB$,垂足为 N,连接 MN,

因为 $AB\perp$ 平面 PBC, $CN\subset$ 平面 PBC,

所以 $AB\perp CN$,

又 $CN\perp PB,PB\cap AB=B,PB,PB\subset$ 平面 PAB,

所以 $CN\perp$ 平面 PAB,

则 $\angle CMN$ 为 CM 与平面 PAB 所成角的平面角,

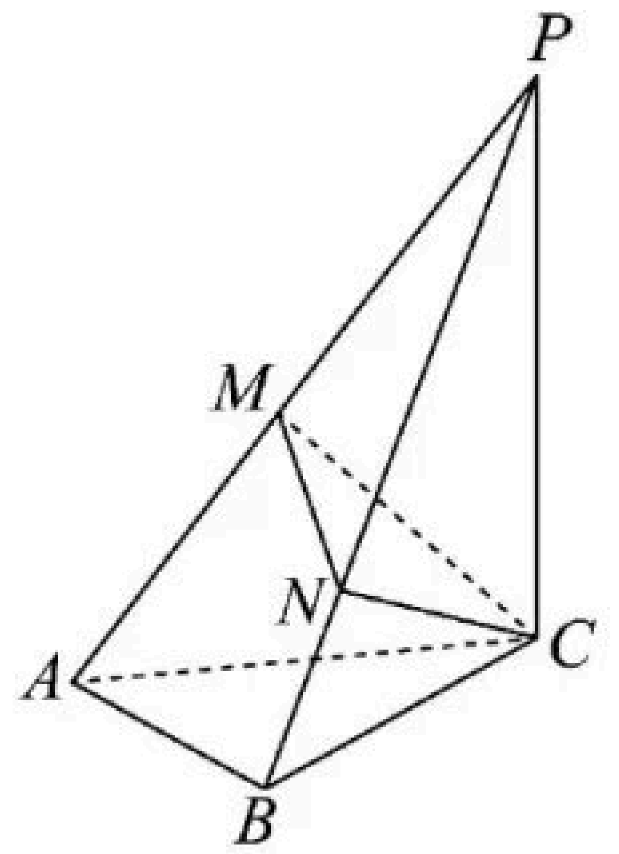
在 $Rt\triangle PAC$ 中, $CM=\dfrac{1}{2}PA=\sqrt{6}$,

在 $Rt\triangle PBC$ 中, $CN=\dfrac{PC\times BC}{PB}=\dfrac{4\times 2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle CMN$ 中, $MN=\sqrt{CM^2-CN^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{70}}{5}$,

故 $\cos\angle CMN=\dfrac{MN}{CM}=\dfrac{\sqrt{105}}{15}$,

即 CM 与平面 PAB 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{105}}{15}$.



19. 【答案】(1)$a_n=n^2$

(2)$S_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+n}{2}, n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{-n^2-n}{2}, n\text{ 为奇数}\end{cases}$

【解析】

【分析】(1) 令 $m=1$,可得 $a_{n+1}-a_n=1+2n$,用累加法即可求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 由题意分 n 是偶数和奇数两种情况讨论,当 n 为偶数时,可用分组求和以及等差数列前 n 项和公式,当 n 为奇数时,利用 n 为偶数的结论即可求解.

【小问 1 详解】

由对任意整数 m,n 均有 $a_{m+n}=a_n+a_m+2mn$,取 $m=1$,得 $a_{n+1}=a_n+1+2n$,

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+3+5+\cdots+2n-1=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$,

当 $n=1$ 时,$a_1=1$,符合上式,所以 $a_n=n^2$.

【 小问 2 详解】

当 n 为偶数时,$S_n=(-1^2+2^2)+(-3^2+4^2)+\cdots+[-(n-1)^2+n^2]$

$=3+7+11+\cdots+(2n-1)=\dfrac{\dfrac{n}{2}(3+2n-1)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

当 n 为奇数时,若 $n=1$,则 $S_1=(-1)^1\times a_1=-1$,

若 $n\geqslant 2$,则 $S_n=S_{n-1}+(-1)^n a_n=S_{n-1}-a_n=\dfrac{(n-1)n}{2}-n^2=\dfrac{-n^2-n}{2}$,

且当 $n=1$ 时,满足 $S_1=\dfrac{-1^2-1}{2}=-1$.

综上所述:$S_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+n}{2}, n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{-n^2-n}{2}, n\text{ 为奇数}\end{cases}$.

20. 【答案】(1)$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$; (2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 当 $BF_2\perp l$ 时,由勾股定理和三角形面积公式可得 $|BF_1|\cdot|BF_2|=10$,再由双曲线定义,即可得出结果.

(2) 当直线 l 与 y 轴垂直时,点 M 与原点 O 重合,求出定值;

当直线 l 与 y 轴不垂直时,设直线 l 的方程为 $x=ty-3$,由渐近线可得 $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}<\dfrac{1}{t}<\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,联立直线

与双曲线方程，由韦达定理结合向量知识，即可得出定值.

【详解】(1) 当 $BF_2 \perp l$ 时，$|BF_1|^2+|BF_2|^2=4c^2$，$S_{\triangle BF_1F_2}=\frac{1}{2}|BF_1|\cdot|BF_2|=5$，

可得 $|BF_1|\cdot|BF_2|=10$.

由双曲线的定义可知，$|BF_1|-|BF_2|=2a$，

两边同时平方可得，$|BF_1|^2+|BF_2|^2-2|BF_1|\cdot|BF_2|=4a^2$，

所以 $4c^2-2\times 10=4a^2$. ①

又双曲线的离心率为 $\frac{3}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$. ②

由①②可得，$a^2=4$，$c^2=9$，所以 $b^2=9-4=5$，

所以双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

(2) 当直线 l 与 y 轴垂直时，点 M 与原点 O 重合，

此时 $|MA|=|MB|=2$，$|AF_1|=1$，$|BF_1|=5$，所以 $\lambda=2$，$\mu=-\frac{2}{5}$，$\lambda+\mu=\frac{8}{5}$.

当直线 l 与 y 轴不垂直时，设直线 l 的方程为 $x=ty-3$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由题意知 $t\neq 0$ 且 $-\frac{\sqrt{5}}{2}<\frac{1}{t}<\frac{\sqrt{5}}{2}$，

将直线 l 的方程与双曲线方程联立，消去 x 得，$(5t^2-4)y^2-30ty+25=0$，

则 $\Delta=900t^2-4\times(5t^2-4)\times 25>0$，$y_1+y_2=\frac{30t}{5t^2-4}$，$y_1y_2=\frac{25}{5t^2-4}$.

易知点 M 的坐标为 $\left(0,\frac{3}{t}\right)$，

则由 $\overrightarrow{MA}=\lambda\overrightarrow{AF_1}$，可得 $\left(x_1,y_1-\frac{3}{t}\right)=\lambda(-3-x_1,-y_1)$，

所以 $\lambda=\frac{3}{ty_1}-1$，

同理可得 $\mu=\frac{3}{y_2t}-1$.

所以 $\lambda+\mu=\frac{3}{ty_1}-1+\frac{3}{y_2t}-1=\frac{3}{t}\cdot\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}-2=\frac{8}{5}$.

综上，$\lambda+\mu$ 为定值 $\frac{8}{5}$.

【点睛】易错点点睛：直线与双曲线左、右分支各交于一点，直线斜率的取值范围容易忽略. 本题考查了运算求解能力和逻辑推理能力，属于一般题目.

21. 【答案】(1)$P(X\geqslant 2)\approx 0.014$，说明见解析

(2) 答案见解析

【解析】

【分析】(1) 可得 $X\sim B(10,0.02)$，即可求出；

(2) 求出两种情况的费用均值，比较即可得出.

【小问 1 详解】

由题可知，单件产品为次品的概率为 0.02，所以 $X\sim B(10,0.02)$，

所以 $P(X=0)=C_{10}^0\times 0.02^0\times 0.98^{10}\approx 0.82$，$P(X=1)=C_{10}^1\times 0.02^1\times 0.98^9\approx 0.166$，

所以 $P(X\geqslant 2)=1-P(X=0)-P(X=1)\approx 0.014$，

由 $P(X\geqslant 2)\approx 0.014$ 可知，如果生产状态正常，一天内抽取的 10 个零件中，至少出现 2 个次品的概率约为 0.014，该事件是小概率事件，因此一旦发生这种状况，就有理由认为设备在这一天的生产过程出现了异常情况，需对设备进行检测和修理，可见上述监控生产过程的规定是合理的.

【小问 2 详解】

若先检测甲部件，设检测费和修理费之和为 ξ 元，则 ξ 的所有可能值为 6000，7000，

则 $P(\xi=6000)=p$, $P(\xi=7000)=1-p$,
所以 $E(\xi)=6000p+7000(1-p)=7000-1000p$,
若先检测乙部件,设检测费和修理费之和为 η 元,则 η 的所有可能值为 6000, 8000,
则 $P(\eta=6000)=1-p$, $P(\eta=8000)=p$,
所以 $E(\eta)=6000(1-p)+8000p=6000+2000p$,
所以 $E(\xi)-E(\eta)=1000-3000p$,
则当 $0<p<\frac{1}{3}$ 时, $E(\xi)>E(\eta)$,应先检测乙部件;当 $p=\frac{1}{3}$ 时, $E(\xi)=E(\eta)$,先检测甲部件或乙部件均可;当 $\frac{1}{3}<p<1$ 时, $E(\xi)<E(\eta)$,应先检测甲部件.

22. 【答案】(1) 分类讨论,答案见解析;
(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 按 a 分类讨论,利用导数与原函数 的 关系即可求得函数 $f(x)$ 的单调性;
(2) 利用分析法去证明 $\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}>\frac{1}{a}$,过程中构造函数 $g(t)=\ln t-\frac{t-1}{2t+1}(t>1)$,利用导数证得 $g(t)>0$,从而证明原不等式成立.

【小问 1 详解】

$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$,
当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)=\frac{x-a}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒大于 0,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,
当 $a>0$ 时,由 $f'(x)=\frac{x-a}{x^2}=0$,可得 $x=a$
当 $0<x<a$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>a$ 时,$f'(x)>0$.
所以函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减,在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

【小问 2 详解】

由题可得 $\ln x_1+\frac{a}{x_1}-1=0$,$\ln x_2+\frac{a}{x_2}-1=0$,
两式相减可得 $a=\frac{x_1x_2(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}$,
要证 $\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}>\frac{1}{a}$,即证 $\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}>\frac{x_1-x_2}{x_1x_2(\ln x_1-\ln x_2)}$,
即证 $2x_1+x_2>\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$,即证 $\frac{2x_1}{x_2}+1>\frac{\frac{x_1}{x_2}-1}{\ln\frac{x_1}{x_2}}$,
令 $\frac{x_1}{x_2}=t>1$,则 $\ln\frac{x_1}{x_2}>0$,即证 $\ln t>\frac{t-1}{2t+1}$,
令 $g(t)=\ln t-\frac{t-1}{2t+1}(t>1)$,则 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{3}{(2t+1)^2}=\frac{4t^2+t+1}{t(2t+1)^2}>0$,
所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(t)>g(1)=0$,
所以 $\ln t>\frac{t-1}{2t+1}$,故原命题成立.