2023—2024 学年海南省高考全真模拟卷（五）

数学·答案

1.C　2.B　3.B　4.A　5.D　6.C　7.A　8.D

9.AC　10.ABD　11.BD　12.AC

13. $(x-2)^2+y^2=1$（答案不唯一）　14.-2　15. $\frac{16\pi}{3}$　16.1

17.解：（1）由题意可得 $2S=2\times\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}bc\cos A$，

所以 $\tan A=\sqrt{3}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

（2）由余弦定理可得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $b^2+c^2-bc=a^2$.

因为 $S=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=10\sqrt{3}$，所以 $bc=40$.

因为 $a+b+c=20$，

所以 $a^2=b^2+c^2-bc$

$=(b+c)^2-3bc$

$=(20-a)^2-120,$

整理得 $40a=280$，所以 $a=7$.

18.解：（1）由 $a_1a_2a_3=1$，可得 $a_1^3\cdot 2^3=1$，

故 $a_1=\frac{1}{2}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-2}$.

则 $na_n=n\times 2^{n-2}$，

故 $S_n=1\times 2^{-1}+2\times 2^0+3\times 2^1+\cdots+n\times 2^{n-2}$，①

$2S_n=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+(n-1)\times 2^{n-2}+n\times 2^{n-1}$.②

由②-①可得，

$S_n = n\times 2^{n-1} - \left(2^{-1}+2^0+2^1+\cdots+2^{n-2}\right) = (n-1)\times 2^{n-1}+\frac{1}{2}$.

（2）证明：若 $a_1=2$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$.

当 $n=1$ 时，$\frac{1}{a_1+1}=\frac{1}{3}$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$.

故 $\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}<\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.

19.解：（1）样本均值 $\mu=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}x_i=30$，

样本方差 $s^2=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(x_i-\mu)^2$

$=\frac{1}{12}\left(\sum_{i=1}^{12}x_i^2-2\mu\sum_{i=1}^{12}x_i+12\mu^2\right)$

$=\frac{1}{12}\times\left(10992-2\times 30\times 360+12\times 30^2\right)$

$=16$.

（2）①由题意可得，树干直径 Y（单位：cm）近似服从正态分布 $N\left(30,4^2\right)$.

在森林公园内再随机选一棵生长了 4 年的红松树，其树干直径位于区间 $[22,38]$ 的概率是 0.9545，

所以 $P(A)=0.9545^{12}\approx 0.57$.

②若树干直径 Y 近似服从正态分布 $N\left(30,8^2\right)$，

则 $P(A)=0.6827^{12}\approx 0.01$

此时 A 发生的概率远小于（1）中根据测量结果得出的概率估计值. A 是一个小概率事件，但是第一次随机选取的 12 棵生长了 4 年的红松树，事件 A 发生了，所以认为护林员给出的结论是错误的.

20.解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=(x-1)e^{x-1}-3\ln x+x^2-1, x>0$，

$f'(x)=xe^{x-1}-\frac{3}{x}+2x$，

$f'(1)=0$，又 $f(1)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=0$.

（2）$f'(x)=xe^{x-1}-\dfrac{3}{x}+2ax=x\left(e^{x-1}-\dfrac{3}{x^2}+2a\right)$，$x>0$，

设$g(x)=e^{x-1}-\dfrac{3}{x^2}+2a$，

则$g'(x)=e^{x-1}+\dfrac{6}{x^3}>0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

又$x\to+\infty, g(x)\to+\infty$；

$x\to 0, g(x)\to-\infty$.

所以存在唯一的$x_0\in(0,+\infty)$，使得$g(x_0)=0$，

当$x\in(0,x_0)$时，$g(x)<0, f(x)$单调递减，

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$g(x)>0, f(x)$单调递增，

当$x=x_0$时，$f(x)$取得极小值，所以$f(x)$有唯一极值点.

21.解：（1）分别取AD,BC,PS的中点E,F,G，

连接PE,PF,GF,SF,EF，

由题意可知多面体$PS-ABCD$的棱长全相等，
且四边形$ABCD$为正方形，

所以$EF\perp BC, PF\perp BC, SF\perp BC$，

因为$EF\cap PF=F, EF,PF\subset$平面$PEF$，

所以$BC\perp$平面PEF，同理$BC\perp$平面PFS.
又平面$PEF\cap$平面$PFS=PF$，

所以P,E,F,S四点共面.

又因为$EF=PS=AB, PE=SF$，

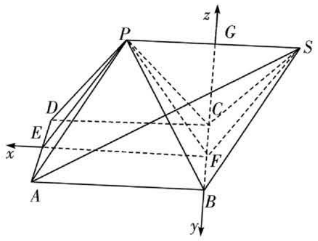
所以四边形$PEFS$为平行四边形，
所以$PS\,/\!/\,EF$，

又$EF\subset$平面$ABCD, PS\not\subset$平面$ABCD$，

所以$PS\,/\!/$平面$ABCD$.

（2）以F为原点，以FE,FB,FG所在直线分别为x,y,z轴建立如图所示的空间直角坐标系，不妨设

$AB=1$，



则 $P\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),E(1,0,0),A\left(1,\frac{1}{2},0\right),S\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{EP}=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\overrightarrow{EA}=\left(0,\frac{1}{2},0\right),\overrightarrow{AS}=\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

设平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则由 $\begin{cases}\overrightarrow{EP}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{EA}\cdot\vec{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0,\\ \frac{1}{2}y=0,\end{cases}$

令 $z=1$，则 $x=\sqrt{2}$，所以 $\vec{n}=(\sqrt{2},0,1)$.

设 AS 与平面 PAD 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AS}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AS}|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

即 AS 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

22.解：（1）依题意可得，$|AB|=2b=2$，所以 $b=1$.

设 $P(x_0,y_0)$，

则 $k_{PA}=\frac{y_0-1}{x_0},k_{PB}=\frac{y_0+1}{x_0}$，

所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_0^2-1}{x_0^2}=-\frac{1}{a^2}=-\frac{1}{2}$，

所以 $a^2=2$，

所以 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）由题可知直线PA,PB的斜率存在且不为0，

不妨设直线PA的斜率为k，则直线PB的斜率为$-\dfrac{1}{2k}$，

直线$PA: y=kx+1$，令$y=2$，解得$x=\dfrac{1}{k}$，

所以$D\left(\dfrac{1}{k},2\right)$，

直线$PB: y=-\dfrac{1}{2k}x-1$，令$y=2$，解得$x=-6k$，所以$E(-6k,2)$.

直线$DB: y=3kx-1$，

由$\begin{cases} y=3kx-1, \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$消去$y$，

可得$(18k^2+1)x^2-12kx=0$，

则$\Delta=(12k)^2>0$，且$x_M+x_B=\dfrac{12k}{18k^2+1}$，

解得$x_M=\dfrac{12k}{18k^2+1}$，

所以$M\left(\dfrac{12k}{18k^2+1},\dfrac{18k^2-1}{18k^2+1}\right)$，

所以直线ME的方程为

$$y-2=\frac{2-\dfrac{18k^2-1}{18k^2+1}}{-6k-\dfrac{12k}{18k^2+1}}\cdot(x+6k),$$

整理得$y-2=-\dfrac{1}{6k}(x+6k)$，

即$x+6ky-6k=0$，

即$x+6k(y-1)=0$，

所以直线ME过定点$(0,1)$.

公众号：高中试卷君

关于我们