

绝密★启用前

金科大联考·2024届高三12月质量检测

数 学

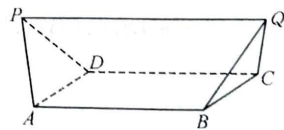
全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答,写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 选择题用 2B 铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑;非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答;字体工整,笔迹清楚。
4. 考试结束后,请将试卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$, $B = \{y | y = 2^x + 1\}$, 则 $A \cup B =$
 A. $(1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(1, 3)$ D. $[1, 3)$
2. 已知 $i(z-1) = z+1$, 则 $\bar{z} =$
 A. $-i$ B. $1-i$ C. i D. $1+i$
3. 已知 a, b 为单位向量, 若 $(a+2b) \perp (3a-b)$, 则 $\cos \langle a, b \rangle =$
 A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$
4. 若函数 $f(x) = \frac{a \sin x}{1 + e^x} - \sin x$ 为偶函数, 则实数 $a =$
 A. 1 B. 0 C. -1 D. 2
5. 刍甍是《九章算术》中出现的一种几何体, 如图所示, 其底面 $ABCD$ 为矩形, 顶棱 PQ 和底面平行, 书中描述了刍甍的体积计算方法: 求积术曰, 倍下袤, 上袤从之, 以广乘之, 又以高乘之, 六而一, 即 $V = \frac{1}{6} (2AB + PQ) BC \cdot h$ (其中 h 是刍甍的高, 即顶棱 PQ 到底面 $ABCD$ 的距离), 已知 $AB = 2BC = 4$, $\triangle PAD$ 和 $\triangle QBC$ 均为等边三角形, 若二面角 $P-AD-B$ 和 $Q-BC-A$ 的大小均为 150° , 则该刍甍的体积为
 A. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ B. $3\sqrt{3}$
 C. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ D. $4\sqrt{3}$



【高三数学 第 1 页(共 4 页)】

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 设 S_n 是公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $3a_2 = a_4$,则 $\frac{S_{2023}}{a_{2023}} =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = \ln(ax+1)$,且 $y=2x$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条切线,则 $a =$ _____.

15. 设 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, O 为坐标原点, M 为 C 上一个动点,且 $|\overrightarrow{MF_1}|^2 + 2\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{F_1O}$ 的取值范围为 $[1, 3]$,则椭圆 C 的长轴长为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$,若 $f(x) \leq f(\frac{\pi}{6})$,且 $f(0) + f(\frac{2\pi}{3}) = 0$,则 $f(\frac{\pi}{3}) =$ _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,面积为 S ,且 $S = \frac{abc}{4}$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径;

(2) 若 $b+c=2$,且 $A = \frac{2\pi}{3}$,求 BC 边上的高.

18. (本小题满分 12 分)

设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $\frac{S_1}{1} + \frac{S_2}{2} + \dots + \frac{S_n}{n} = 2^n - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{n+2}{na_n}$,证明: $b_1 + b_2 + \dots + b_n < 4$.

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x(x^2 - ax - a), a \in \mathbf{R}$.

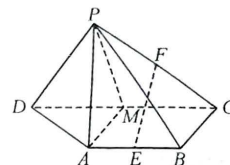
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a \geq 0$ 时,设 x_1, x_2 分别为 $f(x)$ 的极大值点、极小值点,求 $f(x_1) - f(x_2)$ 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AB \perp BC, 2AB = 2BC = CD = PD = PC$, 设 E, F, M 分别为棱 AB, PC, CD 的中点.

- (1) 证明: $EF \parallel$ 平面 PAM ;
(2) 若 $PA = PM$, 求 EF 与平面 PCD 所成角的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 \ln x - 2 \ln x + ax^2 - \frac{1}{2}, a \in \mathbf{R}$.

- (1) 证明: $f(x)$ 有唯一的极值点;
(2) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, F 为 C 的焦点, $P(4, y_0) (y_0 > 0)$ 在 C 上, 且 $|PF| = 5$.

- (1) 求抛物线 C 的方程;
(2) 若直线 l 与 C 交于 A, B 两点 (A, B 分别位于直线 $x = 4$ 的两侧), 且直线 PA, PB 的斜率之和为 0,
(i) 求直线 l 的斜率;
(ii) 求 $\triangle PAB$ 的面积的最大值.

【高三数学 第 4 页 (共 4 页)】

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

