2024年1月“七省联考”押题预测卷05

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\left\{x \middle| y=\dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}\right\}$，$B=\left\{x \middle| y=\ln\left(2^x-2\right)\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\left\{x \middle| 0<x<\dfrac{3}{2}\right\}$　　B. $\left\{x \middle| 1<x<\dfrac{3}{2}\right\}$

C. $\left\{x \middle| 1\le x<\dfrac{3}{2}\right\}$　　D. $\left\{x \middle| x<\dfrac{3}{2}, x\ne 1\right\}$

2．复数 z 满足 $(1+i)\cdot z=1-i^{2025}$，则 $\overline{z}$ 的虚部为（　　）

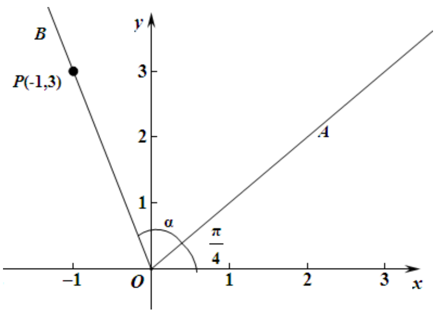
A. i　　B. -1　　C. $-i$　　D. 1

3．英国数学家哈利奥特最先使用“<”和“>”符号，并逐渐被数学界接受，不等号的引入对不等式的发展影响深远．对于任意实数 a、b、c、d，下列命题是真命题的是（　　）

A. 若 $a^2<b^2$，则 $a<b$　　B. 若 $a<b$，则 $ac<bc$

C. 若 $a<b$，$c<d$，则 $ac<bd$　　D. 若 $a<b$，$c<d$，则 $a+c<b+d$

4．如图所示，α 为射线 OA，OB 的夹角，$\angle AOx=\dfrac{\pi}{4}$，点 $P(-1,3)$ 在射线 OB 上，则 $\dfrac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})}{\cos\alpha}=$（　　）



A. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{3}+1}{2}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}$

5．下列函数中，既是偶函数又在 $(0,2)$ 上单调递减的是（　　）

A. $y=2^{|x|}$　　B. $y=-x^3$

C. $y=\cos\dfrac{x}{2}$　　D. $y=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$

6．已知圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上两动点 A，B 满足 $\triangle ABC$ 为正三角形，O 为坐标原点，则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|$ 的最大值为（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

7．现有 4 名男生和 3 名女生计划利用假期到某地景区旅游，由于是旅游的旺季，他们在景区附近订购了一家酒店的 5 间风格不同的房间，并约定每个房间都要住人，但最多住 2 人，男女不同住一个房间，则女生甲和女生乙恰好住在同一间房的概率是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{2}{7}$　　D. $\frac{3}{10}$

8． $a=2\ln1.01,b=\ln1.02,c=\sqrt{1.04}-1$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．下列命题正确的是（　　）

A. 若样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的方差为 2，则数据 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_6-1$ 的方差为 8

B. 若 $P(A)=0.6,P(B)=0.8,P(A|B)=0.5$，则 $P(B|A)=\frac{2}{3}$.

C. 在一组样本数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，（$n\geq2$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$，不全相等）的散点图中，若所有样本点 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 都在直线 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 上，则这组样本数据的线性相关系数为 $-\frac{1}{2}$

D. 以模型 $y=ce^{kx}$ 去拟合一组数据时，为了求出经验回归方程，设 $z=\ln y$，求得线性回归方程为 $\hat{z}=4x+0.3$，则 c,k 的值分别是 $e^{0.3}$ 和 4

10．已知函数 $f\left(x\right)=\cos^2\left(x+\frac{\varphi}{2}\right)(0<\varphi<\pi)$ 的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$，则（　　）

A. $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 π

B. $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}$

C. 直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 是函数 $f\left(x\right)$ 图像的一条对称轴

D. 若函数 $y=f(\omega x)(\omega>0)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上单调递减，则 $\omega\in\left(0,\frac{7}{12}\right]$

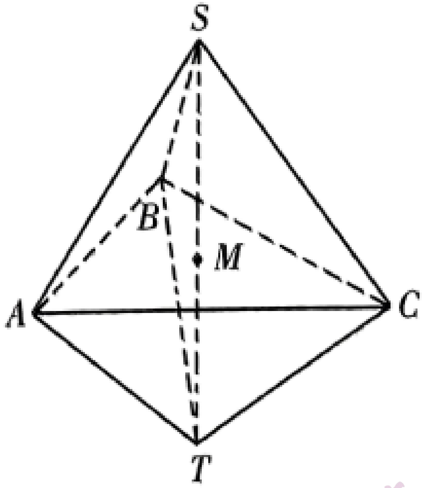
11．已知正项数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $2\left(S_n+S_{n-1}\right)=a_n^2+1\left(n\geq2\right)$，$n\in\mathbf{N}^*$. $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，T_n 为 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和.下列说法正确的是（　　）

A. $a_2=2$　　B. $a_n=(-1)^n$

C. $a_n=2n-1$　　D. $T_n<\frac{1}{2}$

12．如图所示的六面体中，SA，SB，SC 两两垂直，ST 连线经过三角形 ABC 的重心 M，且

$\overrightarrow{SM}=\lambda\overrightarrow{MT}(\lambda>0)$，则（　　）



A. 若$\lambda=\dfrac{1}{2}$，则$TC\perp$平面TAB

B. 若$\lambda=2$，则$SA\parallel$平面TBC

C. 若S,A,B,C,T五点均在同一球面上，则$\lambda=\dfrac{1}{2}$

D. 若点T恰为三棱锥$S-ABC$外接球的球心，则$\lambda=2$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$\vec{c}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$，若$\vec{c}$为$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量，则向量$\vec{a}$，$\vec{b}$夹角的余弦值为________

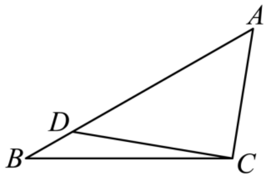
14. $(x^3+1)(x-2)^4$展开式中x^3项的系数为________ .

15. 已知直线$y=k_1x$与$y=k_2x\left(k_1>k_2\right)$是曲线$y=ax+2\ln|x|\left(a\in\mathbf{R}\right)$的两条切线，则$k_1-k_2=$________ .

16. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$的左、右焦点分别为F_1，F_2，M是C上异于顶点的一点，O为坐标原点，E为线段MF_1的中点，$\angle F_1MF_2$的平分线与直线EO交于点P，当四边形MF_1PF_2的面积为$2\sqrt{2}$时，$\sin\angle MF_2F_1=$__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

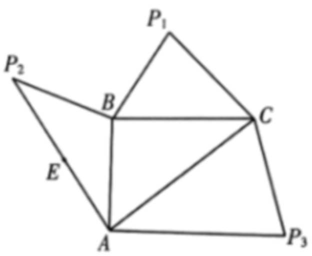
17．在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a=b\left(\sqrt{3}\sin C+\cos C\right)$.

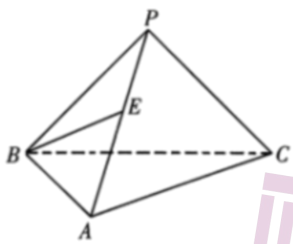


（1）求 B；

（2）已知 $BC=2\sqrt{3}$，D 为边 AB 上的一点，若 $BD=1$，$\angle ACD=\frac{\pi}{2}$，求 AC 的长.

18. 如图，三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中，$AB\perp BC$，$P_1B=AB=\sqrt{6}$，$P_2A=AC=4$，$P_1C=2\sqrt{2}$，E 为 P_2A 的中点.





（1）在三棱锥 $P-ABC$ 中，证明：$BE\perp AC$；

（2）求平面 PBC 与平面 ABC 夹角的余弦值.

19．已知数列 $\{a_n\}$ 是各项都为正整数的等比数列，$a_1=3$，且 a_3 是 a_2 与 $\frac{3}{4}a_4$ 的等差中项，数列 $\{b_n\}$ 满足

$b_1=1,b_{n+1}=2b_n+1$.

（1）求数列$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式;

（2）若$k\cdot\dfrac{b_n+5}{2}-a_n\geq 8n+2k-24$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求实数$k$的取值范围.

20．某中学有A，B两个餐厅为老师与学生们提供午餐与晚餐服务，王同学、张老师两人每天午餐和晚餐都在学校就餐，近一个月（30天）选择餐厅就餐情况统计如下：

选择餐厅情况（午餐，晚餐）	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
王同学	9天	6天	12天	3天
张老师	6天	6天	6天	12天

假设王同学、张老师选择餐厅相互独立，用频率估计概率.

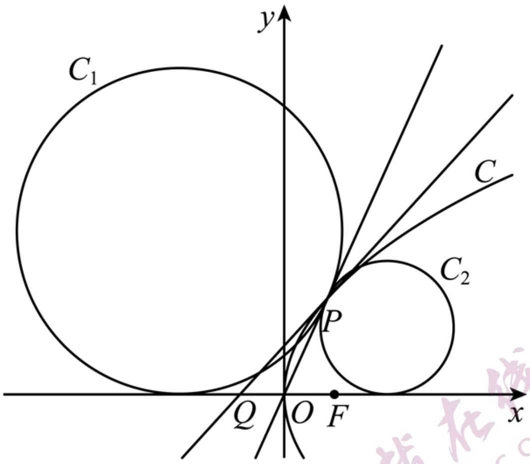
（1）估计一天中王同学午餐和晚餐选择不同餐厅就餐的概率；

（2）记X为王同学、张老师在一天中就餐餐厅的个数，求X的分布列和数学期望$E(X)$；

（3）假设M表示事件“A餐厅推出优惠套餐”，N表示事件“某学生去A餐厅就餐”，$P(M)>0$，已知推出优惠套餐的情况下学生去该餐厅就餐的概率会比不推出优惠套餐的情况下去该餐厅就餐的概率要大，证明．$P(M|N)>\mathrm{P}(M|\overline{N})$.

21．如图，在平面直角坐标系xOy中，F为x轴正半轴上的一个动点．以F为焦点、O为顶点作抛物线

$C: y^2=2px(p>0)$．设 P 为第一象限内抛物线 C 上的一点，Q 为 x 轴负半轴上一点，设 $Q(-a,0)$，使得 PQ 为抛物线 C 的切线，且 $|PQ|=2$．圆 C_1、C_2 均与直线 OP 切于点 P，且均与 x 轴相切．



（1）试求出 a,p 之间的关系；

（2）是否存在点 F，使圆 C_1 与 C_2 的面积之和取到最小值．若存在，求出点 F 的坐标；若不存在，请说明理由．

22．已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\frac{a}{x}+\ln x$，$g(x)=ax-\ln x-2$．

（1）当 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 都存在极小值，且极小值之和为 0 时，求实数 a 的值；

（2）若 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=2\left(x_1\neq x_2\right)$，求证：$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{2}{a}$.