

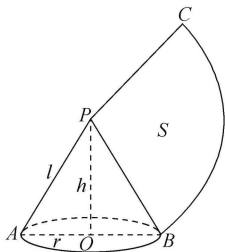


参考答案及解析

2023—2024 学年度上学期高三年级四调考试 · 数学

一、选择题

1. A 【解析】因为集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 0 \leq x < 1\}$.
2. D 【解析】由于直线 $l_1: ax + y - 3 = 0$ 和直线 $l_2: 3x - 2y + 3 = 0$ 垂直, 故 $3a - 2 = 0$, 解得 $a = \frac{2}{3}$.
3. B 【解析】已知圆锥的底面半径 $r = 2$, 高 $h = 4\sqrt{2}$, 则母线长 $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2} = 6$. 圆锥的侧面展开图为扇形, 且扇形的弧长为圆锥底面圆周长 $2\pi r$, 扇形的半径为圆锥的母线长为 l , 所以圆锥的侧面积 $S = \frac{1}{2} \times 2\pi r l = \pi r l = 2 \times 6\pi = 12\pi$.



4. B 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x(1+x)$, 所以 $f(-1) = -f(1) = -2$.
5. B 【解析】因为 α 是第一象限角, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\cos 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{5}{\sqrt{5}} = -\frac{7}{5}$.
6. A 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $a_1 > 0, q > 0$, 由题意可得 $\begin{cases} a_1 a_3 = a_2^2 = 16, \\ S_1 + \frac{1}{2} S_3 = \frac{3}{2} S_2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a_2 = 4, \\ a_1 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3) = \frac{3}{2}(a_1 + a_2), \end{cases}$ 整理得 $\begin{cases} a_2 = 4, \\ a_3 = 2a_2 = 8, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} a_1 q = 4, \\ a_1 q^2 = 8, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 2, \\ q = 2, \end{cases}$ 所以 $S_6 = \frac{2 \times (1 - 2^6)}{1 - 2} = 126$.
7. A 【解析】因为直线 $x + y + 2 = 0$ 分别与 x 轴, y 轴交于 A, B 两点, 所以令 $x = 0$, 得 $y = -2$, 令 $y = 0$, 得 $x = -2$, 所以 $A(-2, 0), B(0, -2)$, $|AB| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$. 点 P 到直线 $x + y + 2 = 0$ 的距离为 $\triangle ABP$ 的高 h , 圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 2$ 的圆心为 $(2, 0)$, 半径为 $\sqrt{2}$, 圆心

到直线的距离为 $d = \frac{|2 + 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$, 所以点 P 到直线的距离 h 的最大值为 $2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, 最小值为 $2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$, 则 $\triangle ABP$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \times |AB| \times h$, 最大值为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$, 最小值为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$. 所以 $\triangle ABP$ 面积的取值范围为 $[2, 6]$.

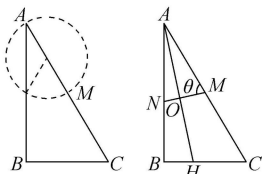
8. D 【解析】令 $x = 0.01$, 则 $a = 2\ln(1 - x) = \ln(1 - 2x + x^2)$, $b = \ln(1 - 2x)$, 显然 $a > b$. 令 $x = 0.02$, 则 $b = \ln(1 - x^2)$, $c = \sqrt{1 - 2x} - 1$, 令 $f(x) = b - c$, 则 $f(x) = \ln(1 - x) - \sqrt{1 - 2x} + 1$ ($x < \frac{1}{2}$), $f'(x) = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x}}{(1 - x)\sqrt{1 - 2x}}$. 因为 $(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2 > 1 - 2x$, 所以 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x) > f(0) = 0$, 即 $b > c$, 综上, $a > b > c$.

二、选择题

9. CD 【解析】当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = -2n + 8$, 又 $a_1 = S_1 = 6$ 适合上式, 所以 $a_n = -2n + 8$, 则 $\{a_n\}$ 是递减数列, 故 A 错误; $a_{10} = -12$, 故 B 错误; 当 $n > 4$ 时, $a_n = 8 - 2n < 0$, 故 C 正确; 因为 $S_n = -n^2 + 7n$ 的对称轴为 $n = \frac{7}{2}$, 开口向下, 而 n 是正整数, 且 $n = 3$ 或 4 距离对称轴一样远, 所以当 $n = 3$ 或 4 时, S_n 取得最大值, 故 D 正确.
10. ACD 【解析】由题得 $f'(x) = -e^x + (2 - x)e^x = (1 - x)e^x$, 则 $f'(2) = -e^2 < 0$, 故 A 错误; 当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上单调递增; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 的极大值即最大值为 $f(1) = e$, 故 B 正确, C 错误; 令 $g(x) = f(x) - a$, 则 $g'(x) = (1 - x)e^x$, 由 B 知 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x)$ 的极大值为 $g(1) = e - a$, 且当 x 趋向于 $-\infty$ 时, $g(x)$ 趋向于 $-a$, 当 x 趋向于 $+\infty$ 时, $g(x)$ 趋向于 $-\infty$, 所以若 $f(x) = a$ 有两个零点, 则 $\begin{cases} e - a > 0, \\ -a < 0, \end{cases}$ 即 $0 < a < e$, 故 D 错误.
11. ABC 【解析】若 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 为偶函数, 则 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, A 选项正确; 若 $g(x)$ 的最小正周期为 3π , 则 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 3\pi$, 所以 $\omega = \frac{2}{3}$, B 选项正确; 由 $x \in (0, \pi)$, 得 $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \omega\pi + \frac{\pi}{6}\right)$. 若 $g(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有 3 个最值点, 则 $\frac{5\pi}{2} <$

高三四调

- $\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{2}$, 得 $\frac{7}{3} < \omega \leq \frac{10}{3}$, C 选项正确; 因为 $g(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$, 若 $g(\frac{\pi}{4}) = \sin(\omega \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\omega \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ 或 $\omega \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, 得 $\omega = \frac{2}{3} + 8k$ 或 $\omega = 2 + 8k, k \in \mathbf{Z}$, 又 $\omega > 0$, 所以 ω 的最小值为 $\frac{2}{3}$, D 选项错误.
12. BCD 【解析】依题意, 将 $\triangle AMN$ 沿直线 l 翻折至 $\triangle A'MN$, 连接 AA' . 由翻折的性质可知, 关于所沿轴对称的两点连线被该轴垂直平分, 故 $AA' \perp MN$, 又 A' 在平面 $BCMN$ 内的射影 H 在线段 BC 上, 所以 $A'H \perp$ 平面 $BCMN$, $MN \subset$ 平面 $BCMN$, 所以 $A'H \perp MN$, $AA' \cap A'H = A'$, $AA' \subset$ 平面 $A'AH$, $A'H \subset$ 平面 $A'AH$, 所以 $MN \perp$ 平面 $A'AH$, 所以 $AO \perp MN$, $A'O \perp MN$, $A'H \perp MN$, 所以 $\angle AOM = 90^\circ$, 且 $\angle A'OH$ 即为二面角 $A'-MN-B$ 的平面角. 对于 A 选项, 由题意可知, $\angle A'DH$ 为 $A'D$ 与平面 $BCMN$ 所成的线面角, 故由线面角最小可知 $\angle A'DH \leq \angle A'DC$, 故 A 错误; 对于 B 选项, 因为 $\angle A'OH$ 即为二面角 $A'-MN-B$ 的平面角, 故由二面角最大可知 $\angle A'DH \leq \angle A'OH$, 故 B 正确; 对于 C 选项, 因为 $MN \perp AO$ 恒成立, 故 O 的轨迹以 AM 为直径的圆弧夹在 $\triangle ABC$ 内的部分, 易知其长度为 $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, 故 C 正确; 对于 D 选项, 如图所示,

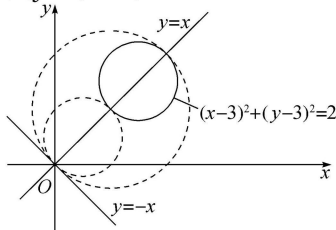


- 设 $\angle AMN = \theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, 在 $\triangle AOM$ 中, 因为 $\angle AOM = 90^\circ$, 所以 $AO = AM \sin \theta = \sin \theta$, 在 $\triangle ABH$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{2}$, $AH = \frac{AB}{\cos \angle BAH} = \frac{\sqrt{3}}{\cos(\theta - \frac{\pi}{3})}$, 所以 $OH = AH - AO = \frac{\sqrt{3}}{\cos(\theta - \frac{\pi}{3})} - \sin \theta$, 设直线 $A'O$ 与平面 $BCMN$ 所成的角为 α , 则 $\cos \alpha = \frac{OH}{AO} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cos(\theta - \frac{\pi}{3})} - \sin \theta}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \theta \cos(\theta - \frac{\pi}{3})} - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{\sin(2\theta - \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}} - 1 \geq \frac{2\sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - 1 = 8\sqrt{3} - 13$, 当且仅当 $2\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{5\pi}{12}$ 时取等号, 故 D 正确.

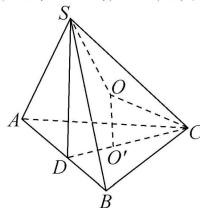
三、填空题

13. -5 【解析】因为 $a \parallel b$, 所以 $-1 \times k = 2 \times \frac{5}{2}$, 故 $k =$

- 5.
14. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 或 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$ (答案不唯一) 【解析】设圆心为 (m, m) , 则半径 $r = \frac{|m+m|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|m|$; 假设与圆 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$ 外切, 则 $\sqrt{(m-3)^2 + (m-3)^2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}|m|$, 所以 $|m-3| = 1 + |m|$, 故 $m^2 - 6m + 9 = m^2 + 2|m| + 1$, 则 $3m + |m| = 4$, 若 $m > 0$, 则 $4m = 4$, 得 $m = 1$, 则圆心为 $(1, 1)$, 半径为 $r = \sqrt{2}$, 故 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$; 若 $m < 0$, 则 $2m = 4$, 得 $m = 2$, 不满足前提. 假设与圆 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$ 内切, 又点 $(3, 3)$ 与 $y = -x$ 的距离为 $\frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} > \sqrt{2}$, 此时圆 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$ 内切于所求圆, 则 $\sqrt{(m-3)^2 + (m-3)^2} = \sqrt{2}|m| - \sqrt{2}$, 所以 $|m-3| = |m| - 1$, 故 $m^2 - 6m + 9 = m^2 - 2|m| + 1$, 则 $3m - |m| = 4$, 若 $m > 0$, 则 $2m = 4$, 得 $m = 2$, 则圆心为 $(2, 2)$, 半径为 $r = 2\sqrt{2}$, 故 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$; 若 $m < 0$, 则 $4m = 4$, 得 $m = 1$, 不满足前提. 综上, 所求圆的方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 或 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$.



15. $12(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ 【解析】如图, 因为球的表面积为 100π , 所以球的半径为 5. 设 $\triangle ABC$ 的中心为 O' , 则 $OO' = 3$, 所以 $CO' = 4$, 所以 $\triangle ABC$ 的边长为 $4\sqrt{3}$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $12\sqrt{3}$. 欲使三棱锥 $S-ABC$ 的体积最大, 则 S 到平面 ABC 的距离最大. 又平面 $SAB \perp$ 平面 ABC , 所以点 S 在平面 ABC 上的射影为线段 AB 的中点 D . 因为 $SO = 5$, 所以 $SD = 3 + \sqrt{25 - 4} = 3 + \sqrt{21}$, 所以三棱锥 $S-ABC$ 的体积最大为 $V = \frac{1}{3} \times 12\sqrt{3} \times (3 + \sqrt{21}) = 12(\sqrt{7} + \sqrt{3})$.



16. 2 【解析】因为 $a_1 = \frac{4}{3}, a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 所以 $a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 > 0$, 即 $a_{n+1} > a_n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 所以 $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1) > 0$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n(a_n - 1)} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n}$, 所以 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$, 所以 $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = (\frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_2 - 1}) + (\frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_3 - 1}) + \dots + (\frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}) = \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$. 所以 $m = S_{2017} = 3 -$

· 数学 ·

参考答案及解析

$\frac{1}{a_{2018}-1}$, 因为 $a_1 = \frac{4}{3}$, 所以 $a_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} + 1 = \frac{13}{9}$, $a_3 = \left(\frac{13}{9}\right)^2 - \frac{13}{9} + 1 = \frac{133}{81}$, $a_4 = \left(\frac{133}{81}\right)^2 - \frac{133}{81} + 1 > 2, \dots$, 则 $a_{2018} > a_{2017} > a_{2016} > a_{2015} > \dots > a_4 > 2$, 故 $a_{2018} - 1 > 1$, 所以 $0 < \frac{1}{a_{2018}-1} < 1$, 所以 $2 < 3 - \frac{1}{a_{2018}-1} < 3$. 因此 m 的整数部分是 2.

四、解答题

17. 解: 因为 $c \sin \frac{A+C}{2} = b \sin C$, 所以 $\sin C \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) = \sin B \sin C$, 因为 $C \in (0, \pi)$, $\sin C \neq 0$, 所以 $\cos \frac{B}{2} = \sin B$, 即 $\cos \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$. 因为 $\frac{B}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos \frac{B}{2} \neq 0$, 所以 $\sin \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$, 故 $\frac{B}{2} = \frac{\pi}{6}$, 解得 $B = \frac{\pi}{3}$. (5分)

(2) 因为 $B = \frac{\pi}{3}$, $b = \sqrt{3}$,

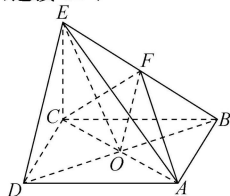
所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b \cdot BD = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

又由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} ac$, 可得 $\frac{\sqrt{3}}{4} ac = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $ac = 2$. (7分)

由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{\pi}{3}$, 可得 $3 = a^2 + c^2 - ac$, 即 $(a+c)^2 = 3 + 3ac$, 即 $(a+c)^2 = 3 + 6 = 9$, 所以 $a+c = 3$,

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $3 + \sqrt{3}$. (10分)

18. (1) 证明: 如图, 连接 OF ,



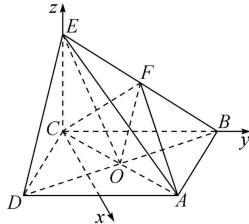
因为底面 $ABCD$ 是菱形, AC 与 BD 交于点 O , 可得 O 为 BD 的中点,

又 F 为 BE 的中点, 所以 OF 为 $\triangle BDE$ 的中位线, 所以 $OF \parallel DE$.

又 $OF \subset$ 平面 ACF , $DE \not\subset$ 平面 ACF , 所以 $DE \parallel$ 平面 ACF . (5分)

(2) 解: 以 C 为坐标原点, CB, CE 所在直线为 y, z 轴, 过 C 作 CB 的垂线所在的直线为 x 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 $ABCD$ 是菱形, $\angle ADC = 60^\circ$, 所以 $\triangle ADC$ 为等边三角形.



不妨设 $AB = CE = 2$, 则 $D(\sqrt{3}, -1, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $E(0, 0, 2)$, $A(\sqrt{3}, 1, 0)$, $F(0, 1, 1)$, 可得 $\overrightarrow{DB} = (-\sqrt{3}, 3, 0)$, $\overrightarrow{BE} = (0, -2, 2)$, (8分)

设平面 EBD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 可得 $\begin{cases} \overrightarrow{DB} \cdot \mathbf{n} = -\sqrt{3}x + 3y = 0, \\ \overrightarrow{BE} \cdot \mathbf{n} = -2y + 2z = 0, \end{cases}$

不妨取 $y = 1$, 则 $x = \sqrt{3}, z = 1$, 可得 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, 1)$. 又 $\overrightarrow{AF} = (-\sqrt{3}, 0, 1)$,

所以 AF 与平面 EBD 所成角的正弦值为 $\left| \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF}}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{AF}|} \right| =$

$$\left| \frac{\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) + 1 \times 0 + 1 \times 1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + 1^2} \times \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} \right| = \frac{\sqrt{5}}{5}. \quad (12分)$$

19. 解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q \in \mathbf{N}^*$,

因为 a_3 是 a_2 与 $\frac{3}{4}a_4$ 的等差中项, 所以 $2a_3 = a_2 + \frac{3}{4}a_4$,

所以 $2q = 1 + \frac{3}{4}q^2$, 解得 $q = 2$ 或 $q = \frac{2}{3}$ (舍去), 所以 $a_n = 3 \times 2^{n-1}$. (3分)

因为 $b_{n+1} = 2b_n + 1$, 所以 $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$, 又 $b_1 + 1 = 2$, 所以数列 $\{b_n + 1\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列,

所以 $b_n + 1 = 2^n$, 所以 $b_n = 2^n - 1$. (6分)

(2) 由 $k \cdot \frac{b_n + 5}{2} - a_n \geq 8n + 2k - 24$,

整理得 $k(2^{n-1} + 2) - 3 \times 2^{n-1} \geq 8(n-3) + 2k$, 即 $(k-3) \cdot 2^{n-1} \geq 8(n-3)$,

所以 $\frac{k-3}{16} \geq \frac{n-3}{2^n}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立. (8分)

令 $f(n) = \frac{n-3}{2^n}$, 则 $f(n+1) - f(n) = \frac{n-2}{2^{n+1}} -$

$$\frac{n-3}{2^n} = \frac{(n-2) - 2(n-3)}{2^{n+1}} = \frac{4-n}{2^{n+1}},$$

所以当 $n \leq 4$ 时, $f(n+1) \geq f(n)$, 当 $n \geq 5$ 时, $f(n+1) < f(n)$,

所以当 $n = 4$ 或 5 时, $f(n)$ 取得最大值,

所以 $f(n)_{\max} = f(4) = \frac{1}{16}$. (10分)

所以 $\frac{k-3}{16} \geq \frac{1}{16}$, 解得 $k \geq 4$.

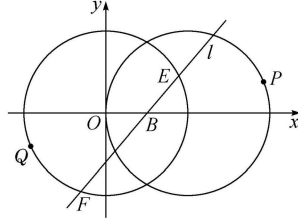
故实数 k 的取值范围是 $[4, +\infty)$. (12分)

20. 解: (1) 设点 $P(x, y)$, 由题意可得 $|PA| = 2|PB|$, 即

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \text{ 化简可得 } (x-2)^2 + y^2 = 4. \quad (4分)$$

(2) 设点 $Q(x_0, y_0)$, 由(1)知点 P 满足方程 $(x-2)^2 + y^2 = 4$, 则 $\begin{cases} x_0 + x = 2 \times 1, \\ y_0 + y = 0, \end{cases}$

代入上式整理可得 $x_0^2 + y_0^2 = 4$, 即点 Q 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 4$, 如图所示, (8分)



高三四调

当直线 l 的斜率存在时, 设其斜率为 k , 则直线 l 的方程为 $y = k(x-1)$, 由 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = k(x-1) \end{cases}$ 消去 y , 得 $(1+k^2)x^2 - 2k^2x + k^2 - 4 = 0$, 显然 $\Delta > 0$,

设 $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{2k^2}{1+k^2}$,
 $x_1x_2 = \frac{k^2-4}{1+k^2}$, (10分)

又 $\vec{BE} = (x_1-1, y_1), \vec{BF} = (x_2-1, y_2)$,
则 $\vec{BE} \cdot \vec{BF} = 1 - (x_1+x_2) + x_1x_2 + y_1y_2 = 1 - (x_1+x_2) + x_1x_2 + k^2(x_1-1)(x_2-1) = (1+k^2) \cdot x_1x_2 - (1+k^2)(x_1+x_2) + (1+k^2) = (1+k^2) \cdot \frac{k^2-4}{1+k^2} - (1+k^2) \cdot \frac{2k^2}{1+k^2} + (1+k^2) = k^2 - 4 - 2k^2 + 1 + k^2 = -3$.

当直线 l 的斜率不存在时, $E(1, \sqrt{3}), F(1, -\sqrt{3})$,
 $\vec{BE} \cdot \vec{BF} = -3$.

故 $\vec{BE} \cdot \vec{BF}$ 是定值, $\vec{BE} \cdot \vec{BF} = -3$. (12分)

21. (1) 解: 当 $a = 1$ 时, $g(x) = \frac{e^x - \sin x - 1}{e^x} = 1 - \frac{\sin x + 1}{e^x}$, (2分)

$g'(x) = -\frac{\cos x - \sin x - 1}{e^x} = \frac{\sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1}{e^x}$,

当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, $-\frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$, $\cos(x + \frac{\pi}{4}) > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ 时, $\frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4}$, $\cos(x + \frac{\pi}{4}) < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, \frac{3\pi}{2})$ 上单调递增. (5分)

(2) 证明: 当 $a = -3$ 时, 要证 $f(x) < e^x + x + 1 - 2e^{-2x}$, 只要证 $3\sin x - x - 2 < -2e^{-2x}$, 即证 $e^{2x}(3\sin x - x - 2) < -2$.

令 $F(x) = e^{2x}(3\sin x - x - 2)$, 则 $F'(x) = e^{2x}(6\sin x - 2x + 3\cos x - 5)$.

当 $x > 0$ 时, 令 $h(x) = x - \sin x$, $h'(x) = 1 - \cos x \geq 0$,

所以 $h(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x) > h(0) = 0$, 即 $x > \sin x$.

所以 $-2x < -2\sin x$.

所以 $F'(x) = e^{2x}(6\sin x - 2x + 3\cos x - 5) < e^{2x}(6\sin x - 2\sin x + 3\cos x - 5) = e^{2x}(4\sin x + 3\cos x - 5) = e^{2x}[5\sin(x+\varphi) - 5] \leq 0$,

其中 φ 为辅助角, 且满足 $\sin \varphi = \frac{3}{5}, \cos \varphi = \frac{4}{5}$.

所以 $F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 即 $F(x) < F(0) = -2$.

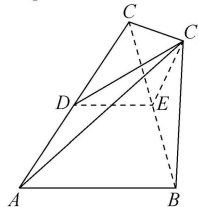
故 $f(x) < e^x + x + 1 - 2e^{-2x}$. (12分)

22. (1) 证明: 如图, 连接 CC_1 , 因为 E, D 分别为 BC, AC 的中点, 所以 $CE = C_1E = EB, CD = C_1D = DA$,

所以 $\triangle ACC_1, \triangle BCC_1$ 分别为以 AC, BC 为斜边的直角三角形,

即 $CC_1 \perp AC_1, CC_1 \perp BC_1$, 又 $AC_1 \cap BC_1 = C_1$, $BC_1 \subset$ 平面 $ABC_1, AC_1 \subset$ 平面 ABC_1 , 所以 $CC_1 \perp$ 平面 ABC_1 ,

因为平面 $C_1AD \cap$ 平面 $BEC_1 = l = CC_1$, 所以 $l \perp$ 平面 ABC_1 . (5分)



(2) 解: 如图, 过 C_1 作 $C_1H \perp BE$, 连接 CP 并延长, 交 AC_1 于点 Q , 连接 EP, BQ , 因为 $C_1E = C_1B$, 所以 H 为 EB 的中点, 所以 $BH = 1$,

连接 AH , 因为 $AB = \sqrt{13}, \cos B = \frac{\sqrt{13}}{13} = \frac{BH}{AB}$, 所以 $AH \perp EB$, 又 $AH \cap C_1H = H, AH \subset$ 平面 $AHC_1, C_1H \subset$ 平面 AHC_1 , 所以 $BE \perp$ 平面 AHC_1 , 连接 HQ , 则 $\angle C_1HQ$ 是截面 $EPQB$ 与平面 BEC_1 所成二面角的平面角,

即 $\tan \angle C_1HQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

在 $Rt\triangle BCC_1$ 中, $BC_1 = 2, BC = 4$, 所以 $CC_1 = 2\sqrt{3}$, 又在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B = 13 + 16 - 2 \times \sqrt{13} \times 4 \times \frac{\sqrt{13}}{13} = 21$,

所以在 $Rt\triangle ACC_1$ 中, $AC_1^2 = AC^2 - CC_1^2 = 21 - 12 = 9$,

所以 $AC_1 = 3$, 所以 $AH^2 = AC_1^2 + HC_1^2$, 所以 $HC_1 \perp AC_1$;

因为 $\tan \angle C_1HQ = \frac{C_1Q}{HC_1} = \frac{C_1Q}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $C_1Q = \frac{3}{2}$, 即 Q 为 AC_1 中点.

又 D 是 AC 中点, 所以 P 是 $\triangle ACC_1$ 的重心,

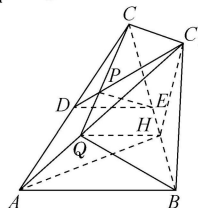
所以 $C_1P = \frac{2}{3}C_1D, CP = \frac{2}{3}CQ$,

所以 $\frac{S_{\triangle CPE}}{S_{\triangle CQB}} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, 所以 $V_{\text{四棱锥}C_1-BQPE} = 2V_{\text{三棱锥}C_1-CPE} = 4V_{\text{三棱锥}C-DPE}$,

又 $V_{\text{三棱锥}C-AQB} = V_{\text{三棱锥}C-BQC_1}$,

所以 $V_{\text{几何体}ABEDQP} = V_{\text{三棱锥}C-AQB} - V_{\text{三棱锥}C-DPE} = V_{\text{三棱锥}C-BQC_1} - V_{\text{三棱锥}C-DPE} = 5V_{\text{三棱锥}C-DPE}$,

所以 $\frac{V_{\text{四棱锥}C_1-BQPE}}{V_{\text{几何体}ABEDQP}} = \frac{4}{5}$. (12分)



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

