

数 学

时量:120 分钟

满分:150 分

得分 _____

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

★1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$, $B = \{x | y = \sqrt{16 - x^2}\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $[-4, 3]$ B. $[1, 3]$ C. $[-4, 4]$ D. $[-3, -1]$

2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ”是“ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ”的

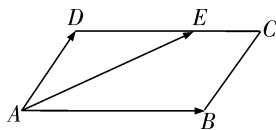
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

★3. 在平面直角坐标系 xOy 中,角 α 以 Ox 为始边,它的终边经过点 $(5, 12)$, 则 $\cos \alpha =$

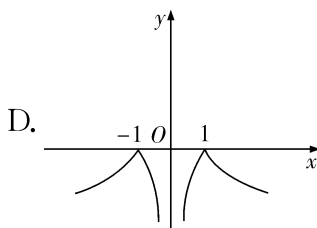
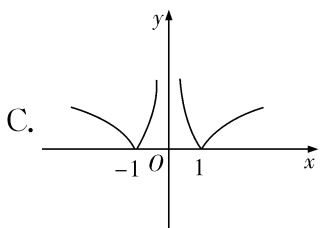
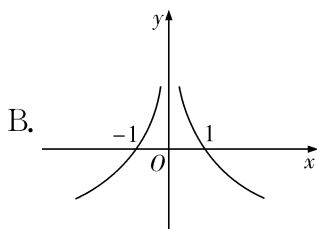
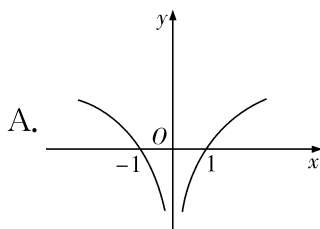
- A. $-\frac{5}{13}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $-\frac{12}{13}$ D. $\frac{12}{13}$

4. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, E 是 CD 边上一点,且 $DE = 2EC$, 则 $\overrightarrow{AE} =$

- A. $\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$ B. $\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$
 C. $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \mathbf{b}$ D. $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \mathbf{b}$



5. 若函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象过点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, 则函数 $y = \log_a |x|$ 的大致图象是



6. 已知 $f(x) = m(x-2m)(x+m+3)$, $g(x) = 3^x - 3$, 若命题“ $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 0$ 或 $g(x) < 0$ ”为真命题, 则 m 的取值范围是

- A. $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$ B. $(-4, 0)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ D. $(0, +\infty)$

7. 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的 $f(x)$ 是单调函数, 且对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒有 $f(f(x) + \log_{\frac{1}{3}} x) = 4$, 则函数 $f(x)$ 的零点为

- A. $\frac{1}{27}$ B. $\frac{1}{9}$ C. 9 D. 27

8. 若 $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 且 $\sin \alpha = x$, 则可以记 $\alpha = \arcsin x$; 若 $\alpha \in [0, \pi]$ 且 $\cos \alpha = x$, 则可以记 $\alpha = \arccos x$. 实数 $y \in (0, 1)$, 且 $(\arccos y)^2 - (\arcsin y)^2 = a$, 则 $2y^2 - 1 =$

- A. $\cos\left(\frac{2a}{\pi}\right)$ B. $-\sin\left(\frac{2a}{\pi}\right)$ C. $\cos\left(\frac{4a}{\pi}\right)$ D. $-\sin\left(\frac{4a}{\pi}\right)$

二、选择题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | x < -3, \text{ 或 } x > 2\}$, 则

- A. $a > 0$
B. 不等式 $bx + c > 0$ 的解集是 $\{x | x < -6\}$
C. $a + b + c > 0$
D. 不等式 $cx^2 - bx + a < 0$ 的解集是 $\left\{x \left| x < -\frac{1}{2}, \text{ 或 } x > \frac{1}{3} \right.\right\}$

10. 设正实数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则

- A. $ab \geq \frac{1}{4}$ B. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$
C. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \geq \frac{4}{3}$

11. 已知函数 $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 函数 $g(x)$ 的图象由 $f(x)$ 图象向右平

移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到, 则下列关于函数 $g(x)$ 的说法正确的有

- A. $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 对称
B. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称
C. $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}\right]$ 上单调递增
D. $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(4-x) = -f(x)$, $f(2x+1)$ 为偶函数, $f(1)=2$, 函数 $g(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 满足 $g(x) = g(2-x)$, 若 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有 2023 个交点, 从左至右依次为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{2023}, y_{2023})$, 则下列说法正确的是
- A. $f(x)$ 为奇函数
B. 2 为 $y=f(x)$ 的一个周期
C. $y_{1012} = 2$
D. $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2023} = 2023$

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

三、填空题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知幂函数 $f(x) = (m-1)x^m$ 的图象过点 $M(2, a)$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 2, \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 1$, 则 $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.
15. 若 $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha\right)$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
16. 已知 $a > 1, x_1, x_2$ 分别是函数 $f(x) = e^x + x - a$ 与 $g(x) = \ln x + x - a$ 的零点, 若 $m = e^{x_1} + x_2$, 则 m 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题(本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

★17. (本小题满分 10 分)

$$(1) \sqrt{(3-\pi)^2} + 8^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} - 0.5^2 + (\sqrt{3}-1)^0;$$

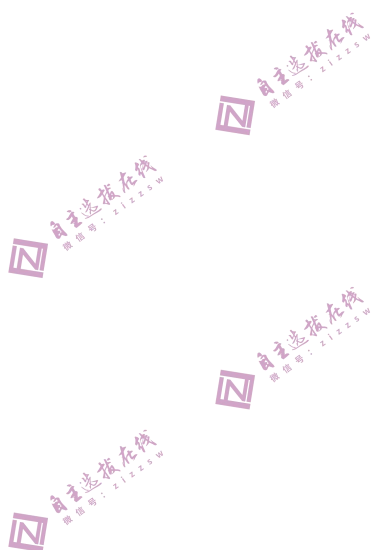
$$(2) (\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2) + \log_3 \sqrt[4]{27} - 2^{\log_2 5}.$$

18. (本小题满分 12 分)

解下列不等式:

(1) $\frac{2x}{x-1} \geq 4$;

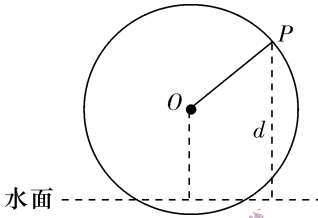
(2) $|2x-3| + |x-2| \leq 3$.



★19. (本小题满分 12 分)

如图,一个半径为 3 m 的筒车按逆时针方向每分转 1.5 圈,筒车的轴心 O 距离水面的高度为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ m. 设筒车上的某个盛水筒 P 到水面的距离为 d (单位:m) (在水面下则 d 为负数),若以盛水筒 P 刚浮出水面时开始计算时间,则 d 与时间 t (单位:s) 之间的关系为 $d=A\sin(\omega t+\varphi)+K(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$.

- (1)求 A,ω,φ,K 的值;
- (2)盛水筒出水后至少经过多少时间就可到达最高点?



20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$ 的最小正周期为 π ,

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 设 $x \in (-\pi, \pi)$, 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集.



21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$, 对于任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, 且 $f(1) = -\frac{1}{2}$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性和单调性;

(2) 设函数 $g(x) = f(x^2 - m) - 2f(|x|)$, 若方程 $g(x) = 0$ 有 4 个不同的解, 求 m 的取值范围.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - k \cdot e^{-x}$ 是偶函数.

(1) 求 k 的值;

(2) 设函数 $g(x) = a[f(x) - 2e^{-x}] - f(2x) - 8$, 若不等式 $g(x) < 0$ 对任意的 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立. 求实数 a 的取值范围;

(3) 设 $h(x) = \log_2 f(x)$, 当 m 为何值时, 关于 x 的方程 $[h(x) - 1 + m] \cdot [h(x) - 1 - 4m] + 2m^2 + m = 0$ 有实根?

