高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：函数与导数、复数、三角函数、解三角形、平面向量、不等式。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 不等式 $x^2-2x-8\leqslant 0$ 的解集为

A. $\{x|-4\leqslant x\leqslant 2\}$　　B. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 4\}$

C. $\{x|x\geqslant 4$ 或 $x\leqslant -2\}$　　D. $\{x|x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -4\}$

2. 已知复数 $z=\frac{2-i}{1+i}$，则下列说法正确的是

A. z 的模为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

B. z 的虚部为 $-\frac{3}{2}i$

C. z 的共轭复数为 $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

D. z 的共轭复数在复平面内对应的点在第四象限

3. 若 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-2$，则 $\tan 2\theta=$

A. -4　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. -3　　D. $-\frac{3}{4}$

4. 一种药在病人血液中的量保持在 1 500 mg 以上时才有疗效，而低于 600 mg 时病人就有危险. 现给某病人的静脉注射了这种药 2 400 mg，如果药在血液中以每小时 20% 的比例衰减，要使病人没有危险，再次注射该药的时间不能超过($\lg 2\approx 0.3$，结果精确到 1 h)

A. 5 h　　B. 6 h　　C. 7 h　　D. 8 h

5. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$

A. $2\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

6. 函数 $f(x)=-\sin^2 x-2\cos x$ 的单调递增区间是

A. $[2k\pi,(2k+1)\pi],k\in\mathbf{Z}$　　B. $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right],k\in\mathbf{Z}$

C. $[(2k-1)\pi,2k\pi],k\in\mathbf{Z}$　　D. $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right],k\in\mathbf{Z}$

7. 把一条线段分割为两部分，使其中一部分与全长之比等于另一部分与这部分之比，其比值是一个无理数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，由于按此比例设计的造型十分美丽柔和，因此称为黄金分割. 黄金分割不仅仅体现在诸如绘画、雕塑、音乐、建筑等艺术领域，而且在管理、工程设计等方面也有着不可忽视的作用. 在$\triangle ABC$中，点D为线段BC的黄金分割点($BD>DC$)，$AB=2$，$AC=3$，$\angle BAC=60°$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$

A. $\frac{7\sqrt{5}-9}{2}$

B. $\frac{9-7\sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{9\sqrt{5}-7}{2}$

D. $\frac{7-9\sqrt{5}}{2}$

8. 已知函数$f(x)=\sin x-x^2+\pi x$的定义域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，则满足$f(\pi-a)>f\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$的实数$a$的取值范围是

A. $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$　B. $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$　C. $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right]$　D. $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 为了得到函数$y=\log_2 x$的图象，只需将函数$y=\log_2(2x)$图象上

A. 所有点的横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变

B. 所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变

C. 所有点沿y轴向下平移1个单位长度

D. 所有点沿x轴向右平移$\frac{1}{2}$个单位长度

10. 设z_1,z_2是复数，则

A. $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

B. 若$z_1z_2\in\mathbf{R}$，则$z_1=\overline{z_2}$

C. 若$|z_1-z_2|=0$，则$\overline{z_1}=\overline{z_2}$

D. 若$z_1^2+z_2^2=0$，则$z_1=z_2=0$

11. 下列命题成立的是

A. 若$a>b,c>d$，则$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

B. 若不等式$x^2+ax-b<0$的解集是$\{x|1<x<2\}$，则$a+b=-5$

C. 若$a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}$，则$a^2+b^2\geqslant 2(a+b-1)$

D. 若a,b满足$-1<a<b<1$，则$a-b$的取值范围是$(-2,2)$

12. 已知函数$f(x)=\ln x$，则

A. 当$x_2>x_1>0$时，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}>0$

B. 当$x_2>x_1>1$时，$x_1f(x_1)<x_2f(x_2)$

C. 当$x_2>x_1>\mathrm{e}$时，$x_2f(x_1)>x_1f(x_2)$

D. 方程$\frac{f(x)}{x}=-1$有两个不同的解

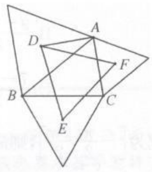
三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 若$f(x)=\frac{2^{2x}+a}{2^x}$是奇函数，则$a=$_________.

14. 已知O是$\triangle ABC$的外心，且$AC=\sqrt{2}$，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=$_________.

15. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0\leqslant\varphi<2\pi)$满足$f(2+x)=f(2-x)$，其图象与$x$轴在原点右侧的第一个交点的坐标为$(6,0)$，则函数$y=f(x)$的一个解析式为_________.

16. 拿破仑·波拿巴，十九世纪法国伟大的军事家、政治家，对数学很有兴趣，他发现并证明了著名的拿破仑定理："以任意三角形的三条边为边向外构造三个等边三角形，则这三个三角形的中心恰为另一个等边三角形的顶点"．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=60^{\circ}$，以AB,BC,AC为边向外作三个等边三角形，其中心依次为D,E,F，若$DF=2\sqrt{3}$，则$\frac{AB}{AD}=$______，$AB+AC$的最大值为______．



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在①$2b\cos B=c\cos A+a\cos C$，②$b\sin A=a\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$，③$\cos 2B=\sin\left(B-\frac{\pi}{2}\right)$这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并进行解答：

$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$\triangle ABC$的面积$S=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$，$c=2$，______，求b．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

18.（本小题满分 12 分）

已知$a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}$，方程$x^2+ax+b=0$的一个根为$1-\mathrm{i}$，复数$z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2$满足$|z_2|=4$．

(1)求复数$\overline{z_1}$；

(2)若$\overline{z_1}z_2>0$，求复数z_2．

19.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=x^2+ax+a$．

(1)若$a\in\mathbf{R}$，解关于x的不等式$f(x)>0$；

(2)若存在$x_0\in(-1,+\infty)$，使得$f(x_0)<0$成立，求整数a的最大值．

20.(本小题满分 12 分)

已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3}\sin x,\cos x)$，$\boldsymbol{b}=(\cos x,\cos x)$.

(1)若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，且 $x\in(-\pi,0)$，求 x 的值；

(2)若函数 $f(x)=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-1$，且 $f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{3}$，求 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=x^2-x+1$.

(1)求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的极值；

(2)证明：有且只有两条直线与函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象都相切.

22.(本小题满分 12 分)

(1)已知函数 $f(x)=\ln x+1-x\ln x(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$，求证：$2-\mathrm{e}\leqslant f(x)\leqslant 1$；

(2)若函数 $g(x)=\frac{|x\ln x+k|}{\mathrm{e}^x}$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上为减函数，求实数 k 的取值范围.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. B　由 $x^2-2x-8\leqslant 0$，得 $(x-4)(x+2)\leqslant 0$，所以 $-2\leqslant x\leqslant 4$. 故选 B.

2. A　$z=\frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{2-1-3\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$，$z$ 的模为 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，故 A 正确；$z$ 的虚部为 $-\frac{3}{2}$，故 B 错误；z 的共轭复数为 $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$，故 C 错误；$z$ 的共轭复数在复平面内对应的点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，在第一象限，故 D 错误. 故选 A.

3. D　$\tan\theta=\tan\left[\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{-2+1}{1-(-2)\times 1}=-\frac{1}{3}$，$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{3}{4}$. 故选 D.

4. B　血液中含药量 y（单位：mg）与注射后的时间 t（单位：h）的关系式为 $y=2\ 400(1-20\%)^t$，由题意，得 $2\ 400\times 0.8^t\geqslant 600$，即 $0.8^t\geqslant\frac{1}{4}$，两边取对数，得 $t\leqslant\log_{0.8}\frac{1}{4}=\frac{\lg\frac{1}{4}}{\lg 0.8}=\frac{-2\lg 2}{3\lg 2-1}\approx\frac{-2\times 0.3}{3\times 0.3-1}=6$(h). 故选 B.

5. B　由已知，得 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=6$，结合 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}$，所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=8+4+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=18$，即 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=3\sqrt{2}$. 故选 B.

6. A　$f(x)=\cos^2 x-2\cos x-1$，设 $t=\cos x$，则 $t\in[-1,1]$，$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$，则当 $t\in[-1,1]$ 时，y 是关于 t 的减函数；当 $x\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，t 是关于 x 的减函数，根据复合函数的单调性法则，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$. 故选 A.

7. A　点 D 为线段 BC 的黄金分割点，则 $\overrightarrow{BD}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{AC}^2-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{AB}^2+(2-\sqrt{5})\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$=\frac{9\sqrt{5}}{2}-\frac{9}{2}-6+2\sqrt{5}+6-3\sqrt{5}=\frac{7\sqrt{5}-9}{2}$. 故选 A.

8. C　函数 $y=\sin x$ 和 $y=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{\pi^2}{4}$ 的图象在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上都关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，且它们都在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上递增，在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上递减，则函数 $f(x)=\sin x-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{\pi^2}{4}$ 的图象在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，且在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上递增，在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上递减. 由 $f(\pi-a)>f\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$，得 $\left|(\pi-a)-\frac{\pi}{2}\right|<\left|\left(\frac{\pi}{2}+a\right)-\frac{\pi}{2}\right|$，即 $\left|\frac{\pi}{2}-a\right|<|a|$，从而 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\leqslant\pi-a\leqslant\frac{3\pi}{2},\\-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}+a\leqslant\frac{3\pi}{2},\\\left|\frac{\pi}{2}-a\right|<|a|,\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{4}<a\leqslant\pi$. 故选 C.

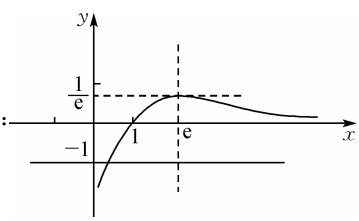
9. AC　函数 $y=\log_2(2x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，可得函数 $y=\log_2 x$ 的图象，则 A 正确；函数 $y=\log_2(2x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，可得函数 $y=\log_2(4x)$ 的图象，则 B 错误；

$\log_2(2x)=1+\log_2 x$，将 $y=1+\log_2 x$ 图象上的所有点沿 y 轴向下平移 1 个单位长度，就得到函数 $y=\log_2 x$ 的图象，则 C 正确；函数 $y=\log_2(2x)$ 图象上所有点沿 x 轴向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度，可得函数 $y=\log_2 2\left(x-\frac{1}{2}\right)=\log_2(2x-1)$ 的图象，则 D 错误. 故选 AC.

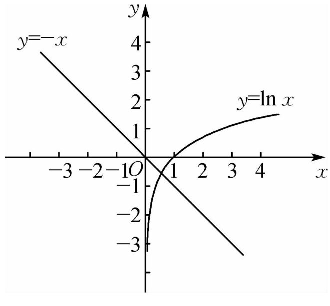
10. AC　设 $z_1=a+bi$，$z_2=x+yi$，$a,b,x,y\in\mathbf{R}$，则 $\overline{z_1-z_2}=\overline{(a-x)+(b-y)i}=(a-x)-(b-y)i=a-bi-(x-yi)=\overline{z_1}-\overline{z_2}$，A 成立；$|z_1-z_2|=|(a-x)+(b-y)i|=0$，则 $(a-x)^2+(b-y)^2=0$，所以 $a=x$，$b=y$，从而 $z_1=z_2$，所以 $\overline{z_1}=\overline{z_2}$，C 成立；对于 B，取 $z_1=i$，$z_2=2i$，满足 $z_1z_2\in\mathbf{R}$，但结论不成立；对于 D，取 $z_1=i$，$z_2=1$，满足 $z_1^2+z_2^2=0$，但结论不成立. 故选 AC.

11. BC　对于 A，取 $a=2$，$b=1$，$c=1$，$d=-2$，则 $\frac{a}{d}=\frac{2}{-2}=-1<\frac{b}{c}=\frac{1}{1}=1$，则 A 错误；对于 B，方程 $x^2+ax-b=0$ 的两根分别为 1 和 2，则 $1+2=-a$，$1\times2=-b$，解得 $a=-3$，$b=-2$，所以 $a+b=-5$，则 B 正确；因为 $a^2+1\geqslant 2a$，$b^2+1\geqslant 2b$，所以 $a^2+b^2\geqslant 2(a+b-1)$，则 C 正确；由 $-1<a<1$，$-1<-b<1$，得 $-2<a-b<2$，又 $a-b<0$，所以 $-2<a-b<0$，即 $a-b$ 的取值范围是 $(-2,0)$，则 D 错误. 故选 BC.

12. BC　$f(x)=\ln x$ 在定义域内单调递增，则 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$，A 错误；$xf(x)=x\ln x$，令 $y=x\ln x$，$y'=\ln x+1$，当 $x>1$ 时，$y'>1>0$，则 $y=x\ln x$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 B 正确；由 $x_2f(x_1)>x_1f(x_2)$，可得 $\frac{f(x_1)}{x_1}>\frac{f(x_2)}{x_2}$，令 $y=\frac{\ln x}{x}$，$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$ 在 $(e,+\infty)$ 上小于 0，所以 $y=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(e,+\infty)$ 单调递减，则当 $x_2>x_1>e$ 时，$\frac{f(x_1)}{x_1}>\frac{f(x_2)}{x_2}$，即 $x_2f(x_1)>x_1f(x_2)$，所以 C 正确；$y=\frac{\ln x}{x}$，当 $x>1$ 时，$y>0$，而函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的图象与直线 $y=-1$ 仅有一个公共点，如图所示：



，则方程 $\frac{f(x)}{x}=-1$ 仅有一个解，故 D 错误. 另解：方程 $\frac{\ln x}{x}=-1$ 的解的个数，即为 $\ln x=-x$ 的解的个数，即为函数 $y=\ln x$ 与 $y=-x$ 图象交点的个数，作出函数 $y=\ln x$ 与 $y=-x$ 图象如图所示：



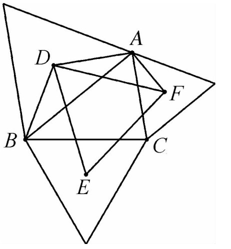
由图象可知方程 $f(x)=-1$ 只有一个解，故 D 错误. 故选 BC.

13. -1　$f(x)=2^x+a\cdot 2^{-x}$. 由题意，得 $f(-x)=-f(x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立 $\Leftrightarrow 2^{-x}+a\cdot 2^x=-2^x-a\cdot 2^{-x}$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立 $\Leftrightarrow (a+1)(2^x+2^{-x})=0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，考虑到 $2^x+2^{-x}>0$，于是 $a=-1$.

14. -1　取 AC 的中点 D，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=-|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=-1$.

15. $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\right)$（或 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{5\pi}{4}\right)$） 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由题意，得 $\frac{T}{4}=6-2=4$，即 $T=16$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{8}$，将 $(6,0)$ 代入 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\varphi\right)$，得 $\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=0$，解得 $\varphi=k\pi-\frac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，考虑到 $0\leqslant\varphi<2\pi$，得 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 或 $\varphi=\frac{5\pi}{4}$，所以 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\right)$ 或 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{5\pi}{4}\right)$.

16. $\sqrt{3}$（2 分）；$4\sqrt{3}$（3 分） 设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$. 如图，连接 AF，BD. 由拿破仑定理知，$\triangle DEF$ 为等边三角形. 在 $\triangle DAB$ 中，$\angle ABD=\angle BAD=30^\circ$，$\angle ADB=120^\circ$，设 $AD=BD=x$，由余弦定理，得 $c^2=x^2+x^2-2x^2\cos120^\circ$，解得 $\frac{c}{x}=\sqrt{3}$，即 $\frac{AB}{AD}=\sqrt{3}$，$AD=\frac{c}{\sqrt{3}}$，同理 $AF=\frac{b}{\sqrt{3}}$；又 $\angle BAC=60^\circ$，$\angle CAF=30^\circ$，所以 $\angle DAF=\angle BAD+\angle BAC+\angle CAF=120^\circ$，在 $\triangle ADF$ 中，由余弦定理，得 $DF^2=AD^2+AF^2-2AD\cdot AF\cdot\cos120^\circ$，即 $12=\frac{c^2}{3}+\frac{b^2}{3}-2\cdot\frac{bc}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$，化简得 $(b+c)^2=bc+36$，由基本不等式得 $(b+c)^2\leqslant\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+36$，解得 $b+c\leqslant4\sqrt{3}$（当且仅当 $b=c=2\sqrt{3}$ 时取等号），所以 $(AB+AC)_{\max}=4\sqrt{3}$.



17. 解：选择条件①：由 $2b\cos B=c\cos A+a\cos C$，根据正弦定理，有 $2\sin B\cos B=\sin C\cos A+\sin A\cos C$，…… 2 分

即 $2\sin B\cos B=\sin(A+C)=\sin B$，…… 4 分

由 $B\in(0,\pi)$，$\sin B\neq0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，

故 $B=\frac{\pi}{3}$. …… 6 分

由 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times a\times2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=\sqrt{3}+1$. …… 8 分

根据余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=4+2\sqrt{3}+4-2(\sqrt{3}+1)\times2\times\frac{1}{2}=6$，

故 $b=\sqrt{6}$. …… 10 分

选择条件②：由 $b\sin A=a\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$，根据正弦定理，有 $\sin A\sin B=\sin A\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$， …… 2 分

由 $A\in(0,\pi)$，得 $\sin A\neq0$，所以 $\sin B=\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B$，…… 4 分

则 $\tan B=\sqrt{3}$，又 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. …… 6 分

由 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times a\times2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=\sqrt{3}+1$. …… 8 分

根据余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=4+2\sqrt{3}+4-2(\sqrt{3}+1)\times2\times\frac{1}{2}=6$，

故 $b=\sqrt{6}$. …… 10 分

选择条件③：$\cos2B=\sin\left(B-\frac{\pi}{2}\right)$，即 $2\cos^2B-1=-\cos B$，…… 2 分

整理得 $2\cos^2B+\cos B-1=0$，解得 $\cos B=\frac{1}{2}$ 或 -1. …… 4 分

由 $B\in(0,\pi)$，得 $\cos B=\frac{1}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. …… 6 分

由$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times a\times 2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$,解得$a=\sqrt{3}+1$. ………………………………… 8分

根据余弦定理,得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=4+2\sqrt{3}+4-2(\sqrt{3}+1)\times 2\times\frac{1}{2}=6$,

故$b=\sqrt{6}$. ………………………………………………………………………… 10分

18.解:(1)依题意,得$(1-\mathrm{i})^2+a(1-\mathrm{i})+b=0$,

即$(a+b)+(-2-a)\mathrm{i}=0$, ……………………………………………………………… 2分

由复数相等的定义及$a,b\in\mathbf{R}$,得$\begin{cases}a+b=0,\\-2-a=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-2,\\b=2.\end{cases}$ ………………………………………………………………… 3分

故复数$\overline{z_1}=a-b\mathrm{i}=-2-2\mathrm{i}$. ……………………………………………………… 4分

(2)设$z_2=x+y\mathrm{i}(x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R})$,由$|z_2|=4$,得$x^2+y^2=16$, ……………………… 6分

$\overline{z_1}z_2=(-2-2\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=(-2x+2y)-(2x+2y)\mathrm{i}$, ……………………………… 8分

又$\overline{z_1}z_2>0$,得$\begin{cases}-2x+2y>0,\\2x+2y=0,\end{cases}$即$\begin{cases}y>x,\\x=-y,\end{cases}$

所以$\begin{cases}x^2+y^2=16,\\x=-y,\\y>x,\end{cases}$ ……………………………………………………………… 10分

解得$\begin{cases}x=-2\sqrt{2},\\y=2\sqrt{2},\end{cases}$

所以$z_2=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\mathrm{i}$. ………………………………………………………………… 12分

19.解:(1)由$f(x)>0$,得$x^2+ax+a>0$,$\Delta=a^2-4a$, ……………………………………… 1分

当$\Delta>0$,即$a>4$,或$a<0$时,$x^2+ax+a=0$的根$x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$,

原不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,x>\frac{-a+\sqrt{a^2-4a}}{2}\text{或}x<\frac{-a-\sqrt{a^2-4a}}{2}\right\}$; ………………………… 3分

当$\Delta=0$,即$a=4$,或$a=0$时,$x^2+ax+a=0$的根$x_{1,2}=\frac{-a}{2}$,

原不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{-a}{2}\right\}$; ……………………………………………………… 5分

当$\Delta<0$,即$0<a<4$时,原不等式的解集为$\mathbf{R}$. ……………………………………… 6分

(2)由$x^2+ax+a<0$,得$-a(x+1)>x^2$,

再由$x>-1$,得$-a>\frac{x^2}{x+1}$, ……………………………………………………………… 8分

所以存在$x_0\in(-1,+\infty)$,使得$f(x_0)<0$成立就等价于$-a>\left(\frac{x^2}{x+1}\right)_{\min}$.

而$\frac{x^2}{x+1}=(x+1)+\frac{1}{x+1}-2\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}-2=0$(当且仅当$x=0$时等号成立), ………… 10分

所以$-a>0$，解得$a<0$，

故整数a的最大值为-1. ………………………………………………………………………… 12分

20. 解：(1)由$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，得$\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=0$， ……………………………………………… 1分

即$\cos x(\sqrt{3}\sin x-\cos x)=0$，

所以$\cos x=0$或$\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$. ……………………………………………………………… 2分

当$\cos x=0$时，$x\in(-\pi,0)$，则$x=-\dfrac{\pi}{2}$； ………………………………………………………… 3分

当$\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$时，得$\tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$x\in(-\pi,0)$，则$x=-\dfrac{5\pi}{6}$.

综上，x的值为$-\dfrac{\pi}{2}$或$-\dfrac{5\pi}{6}$. ………………………………………………………………………… 4分

(2)$f(x)=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-1=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$ ……………… 6分

$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$. ………………………………………… 7分

由$f\left(\dfrac{x}{2}\right)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{3}$，得$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{6}$，……………………………………………… 8分

所以$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\pi}{2}\right]=-\sin\left[\dfrac{\pi}{2}-2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=-\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ ………… 10分

$=2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1=2\times\dfrac{1}{36}-1=-\dfrac{17}{18}$. ………………………………………………………… 12分

21. (1)解：$h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-x^2+x-1$的定义域为$(0,+\infty)$，……………………………… 1分

且$h'(x)=\dfrac{1}{x}-2x+1=\dfrac{-2x^2+x+1}{x}=-\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x}$. ……………………………………………… 3分

当$0<x<1$时，$h'(x)>0$；当$x>1$时，$h'(x)<0$，

所以$h(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，……………………………………………… 4分

所以$x=1$是$h(x)$的极大值点，

故$h(x)$的极大值为$h(1)=-1$，没有极小值. ………………………………………………………………… 5分

(2)证明：设直线l分别切$f(x)$，$g(x)$的图象于点$(x_1,\ln x_1)$，$(x_2,x_2^2-x_2+1)$，

由$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，得l的方程为$y-\ln x_1=\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$，即$l$：$y=\dfrac{1}{x_1}\cdot x+\ln x_1-1$；

由$g'(x)=2x-1$，得l的方程为$y-(x_2^2-x_2+1)=(2x_2-1)(x-x_2)$，

即l：$y=(2x_2-1)x-x_2^2+1$.

比较l的方程，得$\begin{cases}\dfrac{1}{x_1}=2x_2-1,\\ \ln x_1-1=-x_2^2+1,\end{cases}$

消去x_2，得$\ln x_1+\dfrac{(1+x_1)^2}{4x_1^2}-2=0$. ……………………………………………………………… 7分

令$F(x)=\ln x+\dfrac{(1+x)^2}{4x^2}-2(x>0)$，则$F'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1+x}{2x^3}=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{2x^3}$.

当$0<x<1$时，$F'(x)<0$；当$x>1$时，$F'(x)>0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $F(x)_{\min}=F(1)=-1<0$. ………………………………………………………………………… 9 分

因为 $F(e^2)>\ln(e^2)-2=0$，所以 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有一个零点； ……………………………… 10 分

由 $F(x)=\ln x+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}-\dfrac{7}{4}$，得 $F(e^{-2})=-2+\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{e^4}{4}-\dfrac{7}{4}=\dfrac{e^2-4}{2}+\dfrac{e^4-7}{4}>0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上有一个零点.

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点， ……………………………………………………………… 11 分

故有且只有两条直线与函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象都相切. ……………………………………………… 12 分

22.(1)证明：$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1=\dfrac{1-x}{x}-\ln x$. ……………………………………………… 1 分

因为 $1\leqslant x\leqslant e$，所以 $1-x\leqslant 0$，$-\ln x\leqslant 0$，

所以 $f'(x)\leqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上为减函数，……………………………………………… 3 分

于是 $f(x)_{\max}=f(1)=1$，$f(x)_{\min}=f(e)=2-e$，

故 $2-e\leqslant f(x)\leqslant 1$. ……………………………………………………………………………… 4 分

(2)解：设 $h(x)=x\ln x+k$，则 $h'(x)=\ln x+1>0$，从而 $h(x)$ 在 $[1,e]$ 上为增函数，

由 $1\leqslant x\leqslant e$，得 $h(1)\leqslant h(x)\leqslant h(e)$，即 $k\leqslant h(x)\leqslant k+e$. ……………………………… 5 分

(ⅰ)当 $k\geqslant 0$ 时，$h(x)\geqslant 0$，则 $g(x)=\dfrac{x\ln x+k}{e^x}$，从而 $g'(x)=\dfrac{\ln x+1-x\ln x-k}{e^x}$，

因为函数 $g(x)=\dfrac{|x\ln x+k|}{e^x}$ 在 $[1,e]$ 上为减函数，

所以 $g'(x)\leqslant 0$，即 $\ln x+1-x\ln x-k\leqslant 0$ 对 $\forall x\in[1,e]$ 恒成立，

即 $k\geqslant \ln x+1-x\ln x$ 对 $\forall x\in[1,e]$ 恒成立，

根据(1)，$f(x)_{\max}=1$，所以 $k\geqslant 1$.

再结合 $k\geqslant 0$，此时，$k\geqslant 1$. ……………………………………………………………………… 7 分

(ⅱ)当 $k\leqslant -e$ 时，$h(x)\leqslant 0$，则 $g(x)=-\dfrac{x\ln x+k}{e^x}$，从而 $g'(x)=-\dfrac{\ln x+1-x\ln x-k}{e^x}$，

因为函数 $g(x)=\dfrac{|x\ln x+k|}{e^x}$ 在 $[1,e]$ 上为减函数，

所以 $g'(x)\leqslant 0$，即 $\ln x+1-x\ln x-k\geqslant 0$ 对 $\forall x\in[1,e]$ 恒成立，

即 $k\leqslant \ln x+1-x\ln x$ 对 $\forall x\in[1,e]$ 恒成立，

根据(1)，$f(x)_{\min}=2-e$，所以 $k\leqslant 2-e$.

再结合 $k\leqslant -e$，此时，$k\leqslant -e$. ………………………………………………………………… 9 分

(ⅲ)当 $-e<k<0$ 时，则存在唯一的 $x_0\in(1,e)$，使得 $h(x_0)=0$，从而 $g(x_0)=0$.

当 $x_1\in(x_0,e)$ 时，$g(x_1)>0$，即存在 x_0，$x_1\in(1,e)$ 且 $x_0<x_1$，使得 $g(x_0)<g(x_1)$，这与"$g(x)$ 在 $[1,e]$ 上为减函数"矛盾，此时不合题意. ……………………………………………………………………………… 11 分

综上，实数 k 的取值范围是 $(-\infty,-e]\cup[1,+\infty)$. ………………………………………………… 12 分