# 昆明一中 2024 届高三第 5 次联考

## 数学参考答案

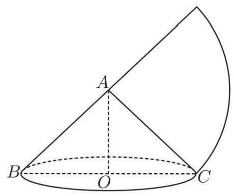
命题、审题组教师　杨昆华 彭力 李文清 李春宣 丁茵 王在方 张远雄 李露 陈泳序 杨耕耘

一、选择题

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | D | A | B | D | C | B | C | C |

1．解析：因为 $z=1-2\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{5}$，选 D.

2．解析：因为 $A=\{1,4\}$，$B=\{1,2\}$，选 A.




3．解析：设直角圆锥底面半径 $OC=r$，直角圆锥母线 $AC=l$，直角圆锥的侧面展开图的圆心角大小为 $\alpha$，由直角圆锥的定义可得，$AO=OC=r$，则 $l=AC=\sqrt{2}r$，由 $\alpha l=2\pi r$ 可得，$\alpha=\dfrac{2\pi r}{l}=\dfrac{2\pi r}{\sqrt{2}r}=\sqrt{2}\pi$．选 B.

4．解析：$y=\tan(x+\dfrac{\pi}{3})$ 在 $\left(-\dfrac{5\pi}{6}+k\pi,\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right)$ $(k\in \mathrm{Z})$ 上单调递增，$y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 在 $\left[-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\dfrac{\pi}{12}+k\pi\right]$ $(k\in \mathrm{Z})$ 上单调递增，$y=\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$ 在 $\left[-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\dfrac{\pi}{12}+k\pi\right]$ $(k\in \mathrm{Z})$ 上单调递增，$y=|\sin x|$ 在 $\left[k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]$ $(k\in \mathrm{Z})$ 上单调递增，则 A，B，C 错，选 D.

5．解析：因为直线 $x+y+4=0$ 分别与 $x$ 轴，$y$ 轴交于 $A$，$B$ 两点，所以 $|AB|=4\sqrt{2}$，又因为点 $P$ 在圆 $x^2+(y-2)^2=2$ 上，所以圆心为 $(0,2)$，则圆心到直线距离 $d_1=\dfrac{|0+2+4|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，故点 $P$ 到直线 $x+y+4=0$ 的距离 $d_2$ 的范围为 $\left[2\sqrt{2},4\sqrt{2}\right]$，则 $S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}|AB|d_2\in[8,16]$，选 C.

6．解析：由题意得 $\sqrt{2}\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{3}$，将 $\cos\alpha=\sqrt{3}-\sqrt{2}\sin\alpha$ 代入 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得 $\left(\sqrt{3}\sin\alpha-\sqrt{2}\right)^2=0$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，则 $\tan\alpha=\sqrt{2}$，选 B.

7．解析：由题意，$f'(x)=4ax+\dfrac{1}{x-1}=0$ 在 $(1,+\infty)$ 有解，则 $a=-\dfrac{1}{4x(x-1)}=-\dfrac{1}{4(x-\frac{1}{2})^2-1}$ 有解，因为 $u(x)=4(x-\dfrac{1}{2})^2-1$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调增，得 $u(x)>0$，则 $a<0$，选 C.

8．解析：因为每个人中奖的概率都为 $\dfrac{1}{4}$，与抽取的顺序无关，所以 A 错误；令“丁未中奖”为事件 A，“甲或乙中奖”为事件 B，则 $P(A)=\dfrac{3}{4}$，$P(AB)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{2}{3}$，所以 B 错误；因为事件“甲或乙中奖”与事件“丙或丁中奖”不可能同时发生且至少有一个发生，所以它们为对立事件，C 正确；

设"丙中奖"为事件$M$,"丁中奖"为事件$N$,则$P(M)=P(N)=\frac{1}{4}$,因为只有一张奖券可以中奖,所以事件$M$,$N$不可能同时发生,所以$P(MN)=0$,所以$P(MN)\neq P(M)P(N)$,所以事件$M$,$N$不相互独立,所以D不正确,选C.

**二、多选题**

| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | AC | ACD | ABD | CD |

9．解析：因为回归方程的斜率为正，所以相关变量$x$，$y$具有正相关关系，所以A正确；由$\bar{x}=2$代入$\hat{y}=1.5x-0.6$得$\bar{y}=2.4$，去除两个异常数据$(-2,7)$和$(2,-7)$后，得到新的$\bar{x}'=\frac{2\times8}{6}=\frac{8}{3}$，$\bar{y}'=\frac{2.4\times8}{6}=3.2$，所以B错误；又因为得到的新的经验回归直线的斜率为3，所以由$\bar{y}-3\bar{x}=3.2-3\times\frac{8}{3}=-4.8$，所以去除异常数据后的经验回归方程为$\hat{y}=3x-4.8$，故C正确；因为经验回归直线的斜率为正数，所以变量$x$，$y$具有正相关关系，去除异常数据后，斜率增大，$\hat{y}$值增加的速度变大，D错误，选AC.

10．解析：对于A：由题意可得$l//\alpha$或$l\subset\alpha$，故A错误；

对于B：由图象可得$\angle CAD=\frac{2\pi}{3}$，则$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$；所以$\angle ADB=\frac{\pi}{6}$，根据线面角的定义可得：$l$与$\alpha$所成角为$\frac{\pi}{6}$，故B正确；

对于C：若点恰好在交线上，则不一定垂直于另一个平面，当且仅当点不在交线上时，根据面面垂直的性质定理，才可得到垂线垂直于另一个平面，故C错误；

对于D：当平面$\alpha$内存在不共线的三点在平面$\beta$的同侧且平面$\beta$的距离相等，可得平面$\alpha$//平面$\beta$；当平面$\alpha$内存在不共线的三点在平面$\beta$的两侧时，若到平面$\beta$的距离相等，则平面$\alpha$与平面$\beta$相交，所以D错误；

选ACD

11．解析：由题，有$C(2,2)$

对于A，因为$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|2\overrightarrow{OC}|=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$，A正确

对于B，因为$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{BA}$，所以$|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4|\overrightarrow{PC}|^2$，$|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{BA}|^2$，两式相加得$2\left(|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2\right)=4|\overrightarrow{PC}|^2+|\overrightarrow{BA}|^2=4|\overrightarrow{PC}|^2+4|\overrightarrow{AC}|^2$，所以$|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2=2\left(|\overrightarrow{PC}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2\right)$，B正确

对于C，当点$A$与点$E$重合时，$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{CA}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$，C错误

对于D，$\triangle CDE$的面积为2，D正确

选ABD

12.解析:因为当$t=0$时,$\triangle AF_1B$的面积为2,所以A错误;因为当$t=0$时,$\tan\angle AF_1F_2=2>\sqrt{3}$,$\angle AF_1F_2>\frac{\pi}{3}$,

当 $t=1$ 时，$\tan\angle AF_1F_2=\frac{2\sqrt{5}}{5}<1$，$\angle AF_1F_2<\frac{\pi}{4}$，根据对称性，存在 $t$ 使△ $AF_1B$ 为直角三角形，所以 B 错误；根据椭圆对称性可知，当 $t=0$ 时，四边形 $AF_1BF_2$ 面积最大，

所以 C 正确；由椭圆的定义得：

△ $AF_1B$ 的周长 $=|AB|+|AF_1|+|BF_1|=|AB|+(2a-|AF_2|)+(2a-|BF_2|)=4a+|AB|-|AF_2|-|BF_2|$，因为 $|AF_2|+|BF_2|\ge|AB|$，所以 $|AB|-|AF_2|-|BF_2|\le 0$，当 $AB$ 过点 $F_2$ 时取等号，

所以 $|AB|+|AF_1|+|BF_1|=4a+|AB|-|AF_2|-|BF_2|\le 4a=4\sqrt{5}$，所以直线 $x=t(-1\le t\le 1)$ 过椭圆的右焦点 $F_2$ 时，△ $AF_1B$ 的周长最大，所以 D 正确，选 CD ．

## 三、填空题

13．解析：当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=2^{-x}+1=-f(x)$，得 $f(x)=-2^{-x}-1$．

14．解析：当 $x>0$ 时，$e^x>0$ 恒成立；当 $x\le 0$ 时，$-x^2-x\ge 0$ 的解集为 $[-1,0]$； 综上，$f(x)\ge 0$ 的解集为 $[-1,+\infty)$.

15．解析：因为 $|AF|=\frac{p}{3}+\frac{p}{2}=5$，所以 $p=6$；又因为 $|AF|=\frac{p}{1-\cos\theta}=5$，所以 $\cos\theta=-\frac{1}{5}$，所以 $|BF|=\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{15}{2}$．

16．解析：由题知，$B_1=f_1(B_0)$，1 为奇数，所以 $B_1$：3，$-1$，3，2，6，6，

$B_2=f_2(B_1)$，2 为偶数，所以 $B_2$：1，3，1，6，4，10，

因为 $B_{2n}=f_{2n}(B_{2n-1})=f_{2n}(f_{2n-1}(B_{2n-2}))$，$2n$ 为偶数，$2n-1$ 为奇数，

所以对于偶数项，$B_{2n-1}-B_{2n-2}=-1$，$B_{2n}-B_{2n-1}=4n$，得 $B_{2n}-B_{2n-2}=4n-1$，

则 $\{B_{2n}-B_{2n-2}\}$ 为等差数列，得数列 $B_{2n}$ 中：

第 2 项为：$0+(3+7+\cdots+4n-3+4n-1)=\frac{[3+(4n-1)]n}{2}=(2n+1)n$，

第 4 项为：$3+(3+7+\cdots+4n-3+4n-1)=(2n+1)n+3$，

第 6 项为：$7+(3+7+\cdots+4n-3+4n-1)=(2n+1)n+7$；

对于奇数项，$B_{2n-1}-B_{2n-2}=2n-1$，$B_{2n}-B_{2n-1}=-2$，得 $B_{2n}-B_{2n-2}=2n-3$，

则 $\{B_{2n}-B_{2n-2}\}$ 为等差数列，得数列 $B_{2n}$ 中：

第 1 项为：$2+(-1+\cdots+2n-5+2n-3)=2+\frac{[-1+(2n-3)]n}{2}=(n-2)n+2$，

第3项为：$2+(-1+\cdots+2n-5+2n-3)=2+\dfrac{[-1+(2n-3)]n}{2}=(n-2)n+2$，

第5项为：$5+(-1+\cdots+2n-5+2n-3)=(n-2)n+5$，

所以 $B_{2n}$ 所有的项的和为

$(2n+1)n+(2n+1)n+3+(2n+1)n+7+n(n-2)+2+n(n-2)+2+n(n-2)+5=9n^2-3n+19$.

所以 $B_2$ 为：1，3，1，6，4，10；$B_{2n}$ 的所有项的和 $9n^2-3n+19$.

**四、解答题**

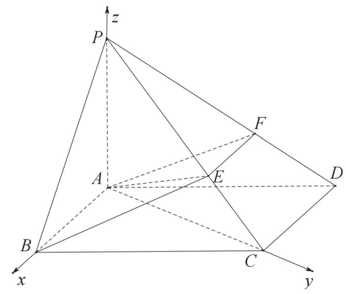
17．解：（1）证明：因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $AB// CD$，

因为 $AB\not\subset$ 平面 $PCD$，且 $CD\subset$ 平面 $PCD$，所以 $AB//$ 平面 $PCD$，

因为平面 $ABEF\cap$ 平面 $PCD=EF$ 且 $AB\subset$ 平面 $ABEF$，所以 $AB// EF$，

所以 $CD// EF$．　　　　　　　　　　　　………5 分

（2）建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$．




由（1）知 $CD// EF$ 且 $EF=\dfrac{2}{3}CD$，则 $\overrightarrow{PE}=2\overrightarrow{EC}$，

则 $A(0,0,0)$，$B(3,0,0)$，$P(0,0,3)$，$C(0,6,0)$，$E(0,4,1)$，

$D(-3,6,0)$，所以 $\overrightarrow{AE}=(0,4,1)$，$\overrightarrow{AB}=(3,0,0)$，$\overrightarrow{EC}=(0,2,-1)$，

$\overrightarrow{DC}=(3,0,0)$，设平面 $ABEF$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，得 $\overrightarrow{n_1}=(0,1,-4)$，

设平面 $DCEF$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EC}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$，得 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,2)$，

则 $\left|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right|=\left|\dfrac{1-8}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}}\right|=\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$，

所以平面 $BEF$ 与平面 $DFE$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{7\sqrt{85}}{85}$．　　　　………10 分

18．解：（1）由题意得，$c^2=a^2-b^2=4-3=1$，所以左焦点为 $F_1(-1,0)$，右焦点为 $F_2(1,0)$.

设点 $M$ 的坐标为 $(x,y)$，则 $\dfrac{|MF_1|}{|MF_2|}=\dfrac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，化简得 $(x+3)^2+y^2=8$，

所以点 $M$ 的轨迹方程为 $(x+3)^2+y^2=8$．　　　　………6 分

（2）由（1）得，点$M$的轨迹方程为$(x+3)^2+y^2=8$，所以圆心到直线$y=x+1$距离为$\sqrt{2}$，

所以直线$y=x+1$与$M$相交的线段$|AB|=2\sqrt{8-2}=2\sqrt{6}$，

联立直线$y=x+1$与$E$的轨迹方程，

$\begin{cases} y=x+1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得$7x^2+8x-8=0$，

由根与系数的关系得$x_1+x_2=-\dfrac{8}{7}, x_1x_2=-\dfrac{8}{7}$.

直线$y=x+1$曲线$C$相交的线段$|CD|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\dfrac{24}{7}$.

所以$\dfrac{|AB|}{|CD|}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\frac{24}{7}}=\dfrac{7\sqrt{6}}{12}$.　　………12 分

19．解：（1）因为$\tan B+\tan C=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\tan B}{\cos C}+\dfrac{\tan C}{\cos B})$，

所以$\dfrac{\sin B\cos C+\sin C\cos B}{\cos B\cos C}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\sin B}{\cos C\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C\cos B})$，

所以$\dfrac{\sin A}{\cos B\cos C}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\sin B}{\cos C\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C\cos B})$，

所以$2\sin A=\sin B+\sin C$，由正弦定理得：$b+c=2a$，

因为$a=3$，所以 $b+c=6$，$\triangle ABC$ 的周长等于$9$．　　………6 分

（2）由余弦定理得：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，又由（1）$b+c=2a$得：$a=\dfrac{b+c}{2}$，

所以$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-(\frac{b+c}{2})^2}{2bc}=\dfrac{\frac{3}{4}(b^2+c^2)-\frac{1}{2}bc}{2bc}$，

而$b^2+c^2\ge 2bc$（当且仅当$b=c$时取“$=$”），

所以$\cos A=\dfrac{\frac{3}{4}(b^2+c^2)-\frac{1}{2}bc}{2bc}\ge\dfrac{\frac{3}{4}\cdot 2bc-\frac{1}{2}bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，

（当且仅当$a=b=c$，即$\triangle ABC$为正三角形时，取“$=$”），

又因为$0<A<\pi$，余弦函数$y=\cos x$在$(0，\pi)$上单调递减，

所以$0<A\le\dfrac{\pi}{3}$，$0<\tan A+\sin A\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$．　　………12 分

20．解：（1）依题意：每 5 人一组需要验血次数 X 的所有可能取值为$1，6$．

所以：$P(X=1)=0.95^5$，$P(X=6)=1-0.95^5$．

所以 $X$ 的分布列为：

| $X$ | 1 | 6 |
|---|---|---|
| $P$ | $0.95^5$ | $1-0.95^5$ |

所以 $E(X)=1\times0.95^5+6\times\left(1-0.95^5\right)=6-5\times0.95^5=2.131$．

所以共需要化验次数大约为：$2.131\times\dfrac{10000}{5}=4262$（次）．

故大约减少 $10000-4262=5738$（次）． ………6 分

（2）假设 $k$ 个人一组，设每个人需要化验的次数为 $Y$，

若混合血样呈阴性，则 $Y=\dfrac{1}{k}$，若混合血样呈阳性，则 $Y=1+\dfrac{1}{k}$

所以 $Y$ 的分布列为：

| $Y$ | $\dfrac{1}{k}$ | $1+\dfrac{1}{k}$ |
|---|---|---|
| $P$ | $0.98^k$ | $1-0.98^k$ |

所以 $E(Y)=\dfrac{1}{k}\left[0.98^k+(k+1)\left(1-0.98^k\right)\right]=\dfrac{1}{k}+1-0.98^k\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$．

因为 $a_k=\dfrac{1}{k}-0.98^k$ 先减后增，

$a_7-a_8=\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{8}-0.98^7+0.98^8=\dfrac{1}{56}-0.0173>0$，$\therefore a_7>a_8$．

$a_9-a_8=\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{8}+0.8508-0.8337=-\dfrac{1}{72}+0.0171>0$，$\therefore a_9>a_8$．

所以当 $k=8$ 时，$E(Y)$ 最小，最小值为：$E(Y)=0.2742$，

此时大约需要化验：$10000\times0.2742=2742$ 次． ………12 分

21．解：（1）由已知得：$b_2=a_3=a_2+2=a_1+2=3$，

$b_3=a_5=a_4+2=a_3+2=a_2+2+2=a_1+4=5$．

因为 $a_{2n+1}=a_{2n}+2$，$a_{2n}=a_{2n-1}$，所以 $b_{n+1}-b_n=a_{2(n+1)-1}-a_{2n-1}=a_{2n+1}-a_{2n-1}=2$，

而 $b_1=a_1=1$，所以 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，

所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2n-1$． ………4 分

（2）不等式$(1+\frac{1}{b_1})(1+\frac{1}{b_2})\cdots(1+\frac{1}{b_n})\geq p\sqrt{2n+1}$化为：$\frac{(1+\frac{1}{b_1})(1+\frac{1}{b_2})\cdots(1+\frac{1}{b_n})}{\sqrt{2n+1}}\geq p$，

设$f(n)=\frac{(1+\frac{1}{b_1})(1+\frac{1}{b_2})\cdots(1+\frac{1}{b_n})}{\sqrt{2n+1}}$，

则$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{(1+\frac{1}{b_{n+1}})\cdot\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2(n+1)+1}}=\frac{2n+2}{\sqrt{(2n+1)\cdot(2n+3)}}=\sqrt{\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+8n+3}}>1$，

所以$f(n)$在$n\in\mathbf{N}^*$上单调递增，所以$f(n)_{\min}=f(1)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，因为$f(n)\geq p$在$n\in\mathbf{N}^*$上恒成立，所以

$f(n)_{\min}\geq p$，所以$p$的取值范围为$(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}]$．　　　………8 分

（3）若$b_2$，$b_m$，$b_k$（$m$，$k\in\mathbf{N}^*$，$5<m<k$）构成等比数列，则$b_m^2=b_2\cdot b_k$，

即：$(2m-1)^2=3(2k-1)$，所以$2m-1=\sqrt{3(2k-1)}$，

由于$2m-1$，$2k-1$均为正整数，所以奇数$3(2k-1)$必须是完全平方数，

又因为$5<m<k$，所以$2k-1=3t^2$，且$t=2p-1$（$p\in\mathbf{N}^*$），

所以，当$t=1$时，$2k-1=3$，$2m-1=3$，即：$m=k=2$，不满足题意，舍弃；

当$t=3$时，$2k-1=27$，$2m-1=9$，即：$m=5$，$k=14$，不满足题意，舍弃；

当$t=5$时，$2k-1=75$，$2m-1=15$，即：$m=8$，$k=38$，

所以符合条件的一组$(m,k)$的值可以是$(8,38)$．

**（注：$t=5$，$t=7,\cdots$，即$t\geq5$的奇数均可，答案开放，满足题意的一组值即可）．**　　　………12 分

22．解：（1）$f(x)$的定义域为R，$f'(x)=(x+1)e^x$，

当$x\in(-\infty,-1)$时，$f'(x)<0$，当$x\in(-1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

故$f(x)$在$(-\infty,-1)$内单调递减，在$(-1,+\infty)$单调递增，

故要使$f(x)$有两个零点，则需$f(x)_{\min}=f(-1)=-e^{-1}-m<0$，故$m>-\frac{1}{e}$，

当$-\frac{1}{e}<m<0$时，因为$f(\frac{1}{m})=\frac{1}{m}e^{\frac{1}{m}}-m>m-m=0$，又$\frac{1}{m}<-e<-1$，

故$f(x)$在$(-\infty,-1)$内存在唯一零点，又$f(0)=-m>0$，故$f(x)$在$(-1,0)$内存在唯一零点，

则$f(x)$在R上存在两个零点，故满足题意的实数$m$的取值范围为$\left(-\frac{1}{e},0\right)$；…………6 分

（2）证明：由（1）可设 $a<-1<b<0$，由 $a\cdot e^{a}=b\cdot e^{b}$ 可得 $e^{a-b}=\dfrac{b}{a}$，

令 $\dfrac{b}{a}=t\in(0,1)$，解得 $\begin{cases}a=\dfrac{\ln t}{1-t}\\ b=\dfrac{t\ln t}{1-t}\end{cases}$，构造 $F(t)=\ln(1+t)+\dfrac{t\ln t}{1-t}$，

令 $h(x)=x-1-\ln x$，则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，故 $h\left(\dfrac{1}{x}\right)\geq h(1)$，即 $\dfrac{1}{x}-1-\ln\dfrac{1}{x}\geq 0$，

令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$，$x\neq 1$，$g'(x)=\dfrac{\dfrac{x-1}{x}-\ln x}{(x-1)^{2}}=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}}{(x-1)^{2}}\leq 0$，故 $g(x)$ 在定义域内单调递减，

故 $g(t+1)<g(t)$，即 $\dfrac{\ln(t+1)}{t}<\dfrac{\ln t}{t-1}$，$\ln(t+1)<\dfrac{t\ln t}{t-1}$，故 $F(t)<0$，

则 $e^{a}+e^{b}=e^{F(t)}<1$，证毕． ……………12 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。