高三数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\left\{x\middle|\log_2 x<0\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2-x-2\le 0\right\}$，则 $\complement_B A=$（　　）

A. $(-\infty,2)$　　　B. $(-1,0]$　　　C. $(-1,2)$　　　D. $[-1,0]\cup[1,2]$

【答案】D

【解析】

【分析】解对数不等式、一元二次不等式求集合，再应用补运算求集合.

【详解】由题设 $A=\{x\,|\,0<x<1\}$，$B=\{x\,|\,(x+1)(x-2)\le 0\}=\{x\,|\,-1\le x\le 2\}$，

所以 $\complement_B A=[-1,0]\cup[1,2]$

故选：D

2. 已知复数 $z_1=1-\mathrm{i}$，$z_2=a+\mathrm{i}$，若 $z_1\cdot z_2$ 为纯虚数，则实数 a 的值为（　　）

A. -2　　　B. 2　　　C. -1　　　D. 1

【答案】C

【解析】

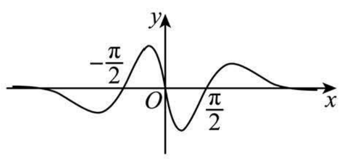
【分析】应用复数乘法及纯虚数定义列方程求参数.

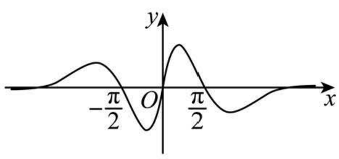
【详解】$z_1\cdot z_2=(1-\mathrm{i})(a+\mathrm{i})=a+1+(1-a)\mathrm{i}$ 为纯虚数，

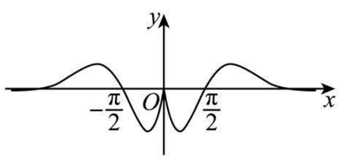
所以 $\begin{cases}a+1=0\\1-a\ne 0\end{cases}\Rightarrow a=-1$.

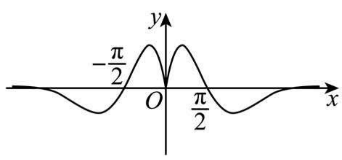
故选：C

3. 函数 $f(x)=\dfrac{x\cos x}{\mathrm{e}^{|x|}}$ 的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定的函数，利用奇偶性可排除两个选项，再利用当$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时，函数值的正负即可判断作答.

【详解】函数$f\left(x\right)=\dfrac{x\cos x}{e^{|x|}}$的定义域为$\mathbf{R}$，$f\left(-x\right)=\dfrac{-x\cos\left(-x\right)}{e^{|-x|}}=-\dfrac{x\cos x}{e^{|x|}}=-f\left(x\right)$，即函数$f(x)$是奇函数，排除CD；

当$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时，$f\left(x\right)=\dfrac{x\cos x}{e^{|x|}}>0$，即当$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时，函数$f(x)$的图象在$x$轴的上方，显然A不满足，B满足.

故选：B

4. 已知α,β是空间两个不同的平面，m,n是空间两条不同的直线，则下列说法正确的是（　　）

A. 若$m//\alpha$，$n//\beta$，且$m//n$，则$\alpha//\beta$

B. 若$m//\alpha$，$n//\beta$，且$m\perp n$，则$\alpha\perp\beta$

C. 若$m\perp\alpha$，$n//\beta$，且$m\perp n$，则$\alpha\perp\beta$

D. 若$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，且$m\perp n$，则$\alpha\perp\beta$

【答案】D

【解析】

【分析】利用空间线面、面面平行、垂直的判定定理和性质定理分别分析各个选项可得解.

【详解】对于A，若$m//\alpha$，$n//\beta$，且$m//n$，则α,β可能相交或平行，故A错误；

对于B，若$m//\alpha$，$n//\beta$，且$m\perp n$，则α,β可能相交或平行，故B错误；

对于C，若$m\perp\alpha$，$n//\beta$，且$m\perp n$，则α,β可能相交或平行，故C错误；

对于D，若$m\perp\alpha$，$m\perp n$，则n在平面α内或$n//\alpha$，又$n\perp\beta$，所以$\alpha\perp\beta$，故D正确.

故选：D.

5. 已知角θ的始边为x轴非负半轴，终边经过点$(3,\sqrt{3})$，将角θ的终边顺时针旋转$\dfrac{\pi}{3}$后得到角β，则$\tan\beta=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】由三角函数的定义可得$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，依题意得$\beta=\theta-\frac{\pi}{3}$，结合两角差的正切公式运算求值.

【详解】因角θ的终边经过点$(3,\sqrt{3})$，由三角函数的定义可得$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又依题意得$\beta=\theta-\frac{\pi}{3}$，所以$\tan\beta=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\theta\cdot\tan\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故选：B.

6. 已知抛物线$E:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l，过E上的一点A作l的垂线，垂足为B，若$|AB|=3|OF|$（O为坐标原点），且$\triangle ABF$的面积为$12\sqrt{2}$，则E的方程为（　　）

A. $y^2=4x$　　B. $y^2=4\sqrt{3}x$　　C. $y^2=8x$　　D. $y^2=8\sqrt{3}x$

【答案】C

【解析】

【分析】表达出$|AB|$和点A坐标，利用$\triangle ABF$的面积求出p，即可得出E的方程.

【详解】由题意，

在抛物线$E:y^2=2px(p>0)$中，$|AB|=3|OF|$，

焦点$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线$l:x=-\frac{p}{2}$

$\therefore |OF|=\frac{p}{2}$，$|AB|=\frac{3}{2}p$，则$A\left(p,\pm\sqrt{2}p\right)$

$\therefore S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|y_A|=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}p\cdot\left|\pm\sqrt{2}p\right|=12\sqrt{2}$，解得：$p=4$

$\therefore E$的方程为：$y^2=8x$.

故选：C.

7. 一个轴截面是边长为$2\sqrt{3}$的正三角形的圆锥型封闭容器内放入一个半径为1的小球O_1后，再放入一个

球O_2，则球O_2的表面积与容器表面积之比的最大值为（　　）

A. $\frac{4}{81}$　　B. $\frac{1}{27}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{27}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

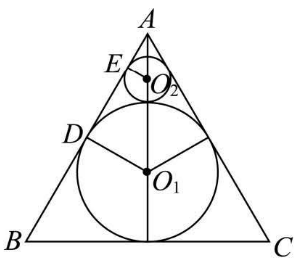
【解析】

【分析】由题设易知放入一个半径为1的小球O_1后，圆锥轴截面中小球O_1的截面圆为内切圆，要使比值最大，球O_2的半径r_2最大，利用内切圆性质求r_2，进而求球体、圆锥表面积，即可得比值.

【详解】由边长为$2\sqrt{3}$的正三角形的内切圆半径为$r_1=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$，

即轴截面是边长为$2\sqrt{3}$的正三角形的圆锥内切球半径为1，

所以放入一个半径为1的小球O_1后，再放一个球O_2，如下图，



要使球O_2的表面积与容器表面积之比的最大，即球O_2的半径r_2最大，

所以只需球O_2与球O_1、圆锥都相切，其轴截面如上图，此时$r_2=\frac{1}{3}\times(2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-2r_1)=\frac{1}{3}$，

所以球O_2的表面积为$4\pi r_2^2=\frac{4\pi}{9}$，圆锥表面积为$3\pi+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}\pi=9\pi$，

所以球O_2的表面积与容器表面积之比的最大值为$\frac{4}{81}$.

故选：A

8. 已知函数$f(x)$的定义域为$\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，且$f\left(x\right)=\begin{cases}\sin 2x,\sin x<\cos x\\ \sin x,\sin x\geq\cos x\end{cases}$，若关于$x$的方程$f(x)=a$有4个不同实根$x_1,x_2,x_3,x_4\left(x_1<x_2<x_3<x_4\right)$，则$f\left(x_1\right)\sin\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2}$的取值范围是（　　）

A. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　B. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$　　C. $(1,\sqrt{2})$　　D. $(-\sqrt{2},1)$

【答案】A

【解析】

【分析】利用辅助角公式得 $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$，讨论其符号求 x 范围，进而写出 $f(x)$ 解析式并画出草图，数形结合得 $x_1+x_2=-\frac{\pi}{2},x_3+x_4=\pi$、$\frac{\sqrt{2}}{2}<f(x_1)<1$，即可得答案.

【详解】由 $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$，

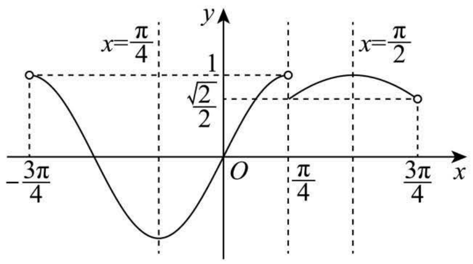
若 $\sin x<\cos x$，则 $\sin(x-\frac{\pi}{4})<0$，可得 $(2k+1)\pi<x-\frac{\pi}{4}<2(k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以 $2k\pi+\frac{5\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{9\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$,

若 $\sin x\geq\cos x$，则 $\sin(x-\frac{\pi}{4})\geq 0$，可得 $2k\pi\leq x-\frac{\pi}{4}\leq(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以 $2k\pi+\frac{\pi}{4}\leq x\leq 2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)=\begin{cases}\sin 2x,-\frac{3\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\\ \sin x,\frac{\pi}{4}\leq x<\frac{3\pi}{4}\end{cases}$，其函数图象如下图，



要使 $f(x)=a$ 有 4 个不同实根 $x_1,x_2,x_3,x_4\ (x_1<x_2<x_3<x_4)$，则 $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$，

由图知：$x_1+x_2=-\frac{\pi}{2},x_3+x_4=\pi$，故 $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2}=\frac{\pi}{4}$，且 $\frac{\sqrt{2}}{2}<f(x_1)<1$，

所以 $f(x_1)\sin\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2}$ 的范围为 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

故选：A

【点睛】关键点点睛：利用三角恒等变换研究正弦型函数性质，并画出 $f(x)$ 的图象为关键.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 近年来，乡村游成为中国国民旅游的热点，下面图 1，2，3，4 分别为 2023 年中国乡村旅游消费者年龄、性别、月收入及一次乡村旅游花费金额的有关数据分析，根据该图，下列结论错误的是（　　）

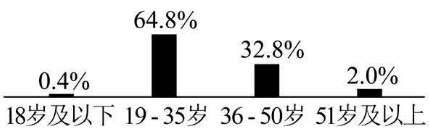


图1

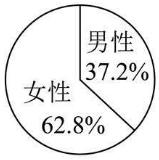


图2

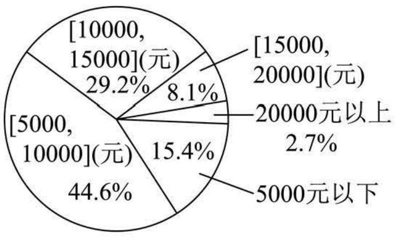


图3

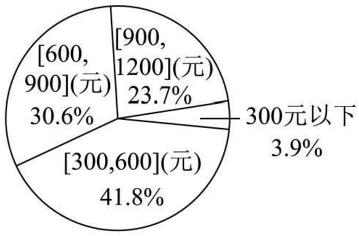


图4

A. 2023 年中国乡村旅游消费者中年龄在$19\sim50$岁之间的男性占比超过$\frac{1}{3}$

B. 2023 年中国乡村旅游消费者中月收入不高于 1 万元的占比超过70%

C. 2023 年中国乡村旅游消费者中一次乡村旅游花费 4 个范围占比的中位数为30.6%

D. 2023 年中国乡村旅游消费者一次乡村旅游花费的平均数估计值高于 650 元（同一花费区间内的数据用其中间值作代表）

【答案】BC

【解析】

【分析】由图 1 和图 2 可判断 A 选项，由图 3 可判断 B 选项，由图 4 可判断 C、D 选项

【详解】由图 1 和图 2 可知，2023 年中国乡村旅游消费者中年龄在$19\sim50$岁之间的男性占比为

$97.6\%\times37.2\%\approx36.3\%$，故 A 正确；

由图 3 可知，2023 年中国乡村旅游消费者中月收入不高于 1 万元的占比为60%，故 B 错误；

由图 4 可知，2023 年中国乡村旅游消费者中一次乡村旅游花费 4 个范围占比的中位数为

$\frac{23.7\%+30.6\%}{2}=27.15\%$，故 C 错误；

由图 4 可知，2023 年中国乡村旅游消费者一次乡村旅游花费的平均数估计值为

$150\times3.9\%+450\times41.8\%+750\times30.6\%+1050\times23.7\%=672.3$，故 D 正确.

故选：BC

10. 若矩形$ABCD$的所有顶点都在椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1(a>0)$上，且$|AB|=2\sqrt{2}$，$|AC|=2\sqrt{3}$，点$P$是

E上与A,B,C,D不重合的动点，则（　　）

A. E的长轴长为4

B. 存在点P，使得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-\dfrac{1}{2}$

C. 直线PA,PB的斜率之积恒为$-\dfrac{1}{2}$

D. 直线PA,PC的斜率之积恒为$-\dfrac{1}{2}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】对A，根据椭圆的对称性结合$|AB|=2\sqrt{2}$可判断椭圆焦点在x轴上，由此求得A,B,C,D坐标，代入椭圆方程求得$a=2$，得解；对B、D，设点$P(x,y)$代入运算可判断得解；对C，举反例可判断.

【详解】因为矩形$ABCD$的顶点都在椭圆上，根据椭圆的对称性可得A,C关于原点对称，B,D关于原点对称，

由$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2}=1$，$|AB|=2\sqrt{2}$，可得$a^2>2$，即椭圆焦点在$x$轴上，

如图所示，又$|AC|=2\sqrt{3}$，$\therefore|BC|=2$，易得$A(\sqrt{2},1)$，$B(-\sqrt{2},1)$，$C(-\sqrt{2},-1)$，$D(\sqrt{2},-1)$.

对于A，将点$A(\sqrt{2},1)$代入椭圆方程可得$\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{2}=1$，解得$a=2$，椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，所以椭圆的长轴长为4，故A正确；

对于B，设点$P(x,y)$，且$x^2+2y^2=4$，$x\neq\pm\sqrt{2}$，则$\overrightarrow{PA}=(\sqrt{2}-x,1-y)$，$\overrightarrow{PC}=(-\sqrt{2}-x,-1-y)$，

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=(\sqrt{2}-x)(-\sqrt{2}-x)+(1-y)(-1-y)=x^2+y^2-3=1-y^2$，又$-\sqrt{2}\leq y\leq\sqrt{2}$，

即当$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-\dfrac{1}{2}$，故B正确；

对于C，当点P是左顶点时，$P(-2,0)$，则$k_{PA}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+2}$，$k_{PB}=\dfrac{1}{-\sqrt{2}+2}$，

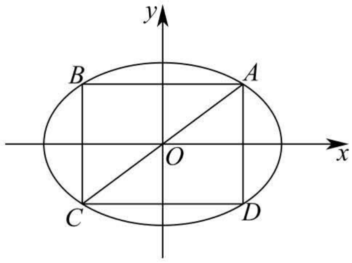
所以$k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+2}\times\dfrac{1}{-\sqrt{2}+2}=\dfrac{1}{2}$，故C错误；

对于D，设点$P(x,y)$，且$x^2+2y^2=4$，$x\neq\pm\sqrt{2}$，

则$k_{PA}=\dfrac{y-1}{x-\sqrt{2}}$，$k_{PC}=\dfrac{y+1}{x+\sqrt{2}}$，

所以$k_{PA}\cdot k_{PC}=\dfrac{y^2-1}{x^2-2}=\dfrac{y^2-1}{2-2y^2}=-\dfrac{1}{2}$，故D正确.

故选：ABD.



11. 已知正数x,y,z满足$5^x=9^y=15^z$，则（　　）

A. $xz+2yz-2xy=0$　　B. $5x<9y<15z$　　C. $xy<2z^2$　　D. $9x+2y<16z$

【答案】AB

【解析】

【分析】设$5^x=9^y=15^z=t,t>1$，求出x,y,z，利用对数的运算及换底公式计算判断A；利用作商法计算判断B；利用作差法计算判断CD.

【详解】依题意，设$5^x=9^y=15^z=t,t>1$，则$x\log_t 5=y\log_t 9=z\log_t 15=1$，

$x=\dfrac{1}{\log_t 5},y=\dfrac{1}{\log_t 9},z=\dfrac{1}{\log_t 15}$，

对于A，$xz+2yz-2xy=xyz(\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{z})=xyz(2\log_t 5+\log_t 9-2\log_t 15)=xyz\log_t\dfrac{5^2\times 9}{15^2}=0$，A正确；

对于B，$\dfrac{5x}{9y}=\dfrac{5\log_t 9}{9\log_t 5}=\log_{5^9}9^5$，而$\dfrac{9^5}{5^9}=\dfrac{3^{10}}{5^9}=\dfrac{3^4}{5^3}\times(\dfrac{3}{5})^6<\dfrac{81}{125}<1$，即有$\log_{5^9}9^5<1$，则$5x<9y$，

又$\dfrac{9y}{15z}=\dfrac{3y}{5z}=\dfrac{3\log_t 15}{5\log_t 9}=\log_{9^5}15^3$，$\dfrac{15^3}{9^5}=\dfrac{5^3}{3^7}=\dfrac{125}{243\times 9}<1$，即有$\log_{9^5}15^3<1$，则$9y<15z$，

所以$5x<9y<15z$，B正确；

对于C，由选项A知，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{z}=0$，得$z=\dfrac{2xy}{x+2y}$，

则$xy-2z^2=xy-2(\dfrac{2xy}{x+2y})^2=xy\cdot\dfrac{(x+2y)^2-8xy}{(x+2y)^2}=\dfrac{xy(x-2y)^2}{(x+2y)^2}>0$，C错误；

对于 D，$9x+2y-16z=9x+2y-\frac{32xy}{x+2y}=\frac{(9x+2y)(x+2y)-32xy}{x+2y}=\frac{(3x-2y)^2}{x+2y}>0$，

因此$9x+2y>16z$，D 错误.

故选：AB

12. 在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P满足$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CC_1}$，其中$\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则下列说法正确的是（　　）

A. 若$\mu=\frac{1}{2}$，则P点轨迹所在直线与平面A_1CD平行

B. 若$\lambda+\mu=1$，则$A_1C\perp BP$

C. 若$\lambda=\mu$，则$|\overrightarrow{DP}|+|\overrightarrow{A_1P}|$的最小值为$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$

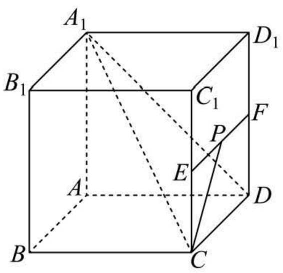
D. 若BP与平面CC_1D_1D所成角的大小为$\frac{\pi}{4}$，则$\lambda\mu$ 的最大值为$\frac{1}{2}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】A、B、C 根据条件确定P点轨迹，结合线面平行判定、线面垂直的判定及性质、平面上两点距离最短判断；D 由条件得P在线段$\overset{\frown}{C_1D}$上运动，令$\angle DCP=\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则$\lambda=\cos\theta,\mu=\sin\theta$，结合三角恒等变换及正弦型函数性质求最值判断.

【详解】A：若E,F为CC_1,DD_1中点，当$\mu=\frac{1}{2}$时P在线段EF上运动，而$EF//CD$，$EF\not\subset$面A_1CD，$CD\subset$面A_1CD，则$EF//$面A_1CD，A 对；



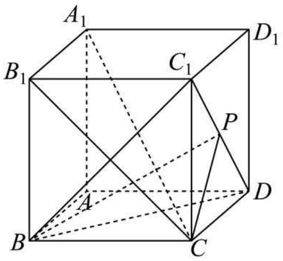
B：由$\lambda+\mu=1$，则P在线段C_1D上运动；在正方体中易知$B_1C\perp BC_1$，

且$A_1B_1\perp$面BCC_1B_1，$BC_1\subset$面BCC_1B_1，则$A_1B_1\perp BC_1$，

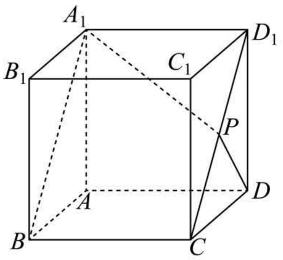
$B_1C\cap A_1B_1=B_1$，$B_1C,A_1B_1\subset$面A_1B_1C，则$BC_1\perp$面A_1B_1C，$A_1C\subset$面A_1B_1C，

所以$BC_1 \perp A_1C$，同理可证$BD \perp A_1C$，又$BC_1 \cap BD = B$，$BC_1, BD \subset$面BC_1D，

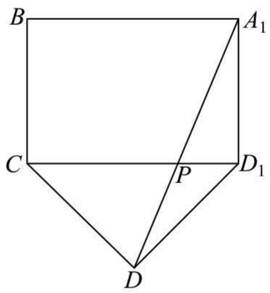
所以$A_1C \perp$面BC_1D，$BP \subset$面BC_1D，则$A_1C \perp BP$，B对；



C：若$\lambda = \mu$，则P在线段CD_1上运动；



将面CDD_1翻折至与面BCD_1A_1共面，如下图，$DD_1 = A_1D_1 = 1, \angle DD_1A_1 = 135°$，

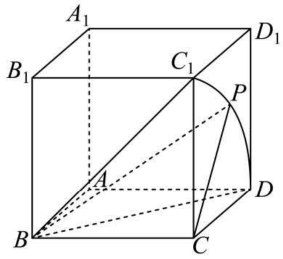


所以D,P,A_1共线时$|\overrightarrow{DP}| + |\overrightarrow{A_1P}|$的最小值为$DA_1 = \sqrt{1+1-2\cos 135°} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$，C错；

D：若BP与平面CC_1D_1D所成角的大小为$\frac{\pi}{4}$，连接BC_1, BD，又$BC \perp$面CDD_1C_1，

结合正方体性质$\angle CC_1B = \angle CDB = \frac{\pi}{4}$，要使线面角$\angle CPB$恒为$\frac{\pi}{4}$，

只需P在面CDD_1C_1中以C为圆心，CC_1为半径的圆弧$\overset{\frown}{C_1D}$上运动；



如上图，令 $\angle DCP=\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则 $\lambda=\cos\theta,\mu=\sin\theta$，

所以 $\lambda\mu=\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta\le\frac{1}{2}$，当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时取等号，

所以 $\lambda\mu$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$，D 对.

故选：ABD

【点睛】关键点点睛：根据条件确定 P 点运动轨迹为关键.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)=x^2-3x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,-2)$ 处的切线方程为______.

【答案】$x+y+1=0$

【解析】

【分析】应用导数几何意义求切线方程即可.

【详解】由题设 $f'(x)=2x-3$，则 $f'(1)=-1$，故点 $(1,-2)$ 处的切线方程为 $y+2=-(x-1)$，

所以 $x+y+1=0$.

故答案为：$x+y+1=0$

14. $\left(x^2-y^2-2y-1\right)^5$ 的展开式中 x^2y^2 的系数为______.（用数字作答）

【答案】140

【解析】

【分析】要产生 x^2y^2 可能是 1 个 x^2，1 个 $-y^2$，3 个 -1 或 1 个 x^2，2 个 $-2y$，2 个 -1，分别进行计算求解即可.

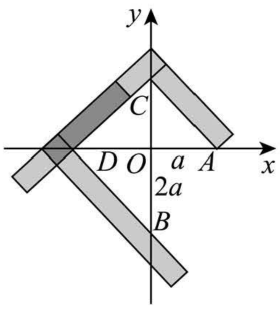
【详解】$\left(x^2-y^2-2y-1\right)^5$ 的展开式中要产生 x^2y^2 可能是 1 个 x^2，1 个 $-y^2$，3 个 -1 或 1 个 x^2，2 个 $-2y$，2 个 -1，

故展开式中含 x^2y^2 项为 $C_5^1x^2C_4^1\left(-y^2\right)C_3^3\left(-1\right)^3+C_5^1x^2C_4^2\left(-2y\right)^2C_2^2\left(-1\right)^2=140x^2y^2$，

即展开式中 x^2y^2 的系数为140.

故答案为：140.

15. 求作一个立方体，使其体积等于已知立方体体积的 2 倍，这就是历史上有名的立方倍积问题.1837 年法国数学家闻脱兹尔证明了立方倍积问题不能只用直尺与圆规作图来完成，不过人们发现，跳出直尺与圆规作图的框框，可以找到不同的作图方法.如图是柏拉图（公元前 427—公元前 347 年）的方法：假设已知立方体的边长为 a，作两条互相垂直的直线，相交于点 O，在一条直线上截取 $OA=a$，在另一条直线上截取 $OB=2a$，在直线 OB,OA 上分别取点 C,D，使 $\angle ACD=\angle BDC=90°$（只要移动两个直角尺，使一个直角尺的边缘通过点 A，另一个直角尺的边缘通过点 B，并使两直角尺的另一边重合，则两直角尺的直角顶点即为 C,D），则线段 OC 即为所求立方体的一边.以直线 OA、OC 分别为 x 轴、y 轴建立直角坐标系，若圆 E 经过点 A,C,D，则圆 E 的方程为______.



【答案】$(x-\frac{1-\sqrt[3]{4}}{2}a)^2+y^2=\frac{(1+\sqrt[3]{4})^2}{4}a^2$

【解析】

【分析】根据题设有 $\begin{cases}|OC|^2=|OA|\cdot|OD|\\|OD|^2=|OC|\cdot|OB|\end{cases}$ 求 OC、OD，再求出 E 坐标和圆的半径，进而写出圆的方程.

【详解】由题设，$\begin{cases}|OC|^2=|OA|\cdot|OD|=a|OD|\\|OD|^2=|OC|\cdot|OB|=2a|OC|\end{cases}$，则 $|OC|^4=2a^3|OC|\Rightarrow|OC|=\sqrt[3]{2}a$，

所以 $|OD|=\sqrt[3]{4}a$，

由 $\angle ACD$=90°，要使圆 E 经过点 A,C,D，则圆心 E 为 AD 中点，

所以 $E(\frac{1-\sqrt[3]{4}}{2}a,0)$ 且半径为 $\frac{1+\sqrt[3]{4}}{2}a$，

故圆 E 的方程为 $(x-\frac{1-\sqrt[3]{4}}{2}a)^2+y^2=\frac{(1+\sqrt[3]{4})^2}{4}a^2$.

故答案为：$(x-\frac{1-\sqrt[3]{4}}{2}a)^2+y^2=\frac{(1+\sqrt[3]{4})^2}{4}a^2$

16. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n+\frac{2\pi}{3}$，集合$S=\{\sin a_n \mid n\in N^*\}$，若S恰有4个子集，则$S=$______.

【答案】$\{-1,\frac{1}{2}\}$或$\{-\frac{1}{2},1\}$

【解析】

【分析】根据题设$\sin a_n$有且仅有2个对应值，结合等差数列定义得$a_n=\frac{2n\pi}{3}+a_1-\frac{2\pi}{3}$，$n\in N^*$，根据正弦型函数周期性，只需研究$\sin a_1,\sin a_2,\sin a_3$是否相等，应用分类讨论求对应集合S.

【详解】由S恰有4个子集，故集合S共有2个元素，即$\sin a_n$有且仅有2个对应值，

由$a_{n+1}-a_n=\frac{2\pi}{3}$，即$\{a_n\}$是公差为$\frac{2\pi}{3}$的等差数列，则$a_n=\frac{2n\pi}{3}+a_1-\frac{2\pi}{3}$，$n\in N^*$，

所以a_n的最小正周期为$T=3$，则角a_n必与a_1,a_2,a_3中的一个终边相同，

所以S中有且仅有$\sin a_1,\sin a_2,\sin a_3$且必有两个相等，

若$\sin a_1=\sin a_2\neq\sin a_3$，则$\sin a_1=\sin(\frac{2\pi}{3}+a_1)$，整理得$\sqrt{3}\cos(a_1+\frac{\pi}{3})=0$，

所以$a_1+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，则$a_1=k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z$，故$\sin a_1=\sin a_2=\pm\frac{1}{2}$，

当$\sin a_1=\sin a_2=\frac{1}{2}$时，不妨取$a_1=\frac{\pi}{6}$，则$a_2=\frac{5\pi}{6}$，$a_3=\frac{3\pi}{2}$，此时$S=\{-1,\frac{1}{2}\}$满足；

当$\sin a_1=\sin a_2=-\frac{1}{2}$时，不妨取$a_1=-\frac{5\pi}{6}$，则$a_2=-\frac{\pi}{6}$，$a_3=\frac{\pi}{2}$，此时$S=\{-\frac{1}{2},1\}$满足；

若$\sin a_1=\sin a_3\neq\sin a_2$，则$\sin a_1=\sin(\frac{4\pi}{3}+a_1)$，整理得$\sqrt{3}\sin(a_1+\frac{\pi}{6})=0$，

所以$a_1+\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in Z$，则$a_1=k\pi-\frac{\pi}{6},k\in Z$，故$\sin a_1=\sin a_3=\pm\frac{1}{2}$，

当$\sin a_1=\sin a_3=\frac{1}{2}$时，不妨取$a_1=\frac{5\pi}{6}$，则$a_2=\frac{3\pi}{2}$，$a_3=\frac{13\pi}{6}$，此时$S=\{-1,\frac{1}{2}\}$满足；

当$\sin a_1=\sin a_3=-\frac{1}{2}$时，不妨取$a_1=-\frac{\pi}{6}$，则$a_2=\frac{\pi}{2}$，$a_3=\frac{7\pi}{6}$，此时$S=\{-\frac{1}{2},1\}$满足；

若$\sin a_2=\sin a_3\neq\sin a_1$，则$\sin a_2=\sin(\frac{2\pi}{3}+a_2)$，整理得$\sqrt{3}\sin(a_2+\frac{\pi}{6})=0$，

所以$a_2+\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in Z$，则$a_2=k\pi-\frac{\pi}{6},k\in Z$，故$\sin a_2=\sin a_3=\pm\frac{1}{2}$，

当$\sin a_2=\sin a_3=\frac{1}{2}$时，不妨取$a_2=\frac{5\pi}{6}$，则$a_2=\frac{\pi}{6}$，$a_3=\frac{3\pi}{2}$，此时$S=\{-1,\frac{1}{2}\}$满足；

当$\sin a_2=\sin a_3=-\frac{1}{2}$时，不妨取$a_2=-\frac{\pi}{6}$，则$a_1=-\frac{5\pi}{6}$，$a_3=\frac{\pi}{2}$，此时$S=\{-\frac{1}{2},1\}$满足；

综上，$S=\{-1,\frac{1}{2}\}$或$\{-\frac{1}{2},1\}$.

故答案为：$\{-1,\frac{1}{2}\}$或$\{-\frac{1}{2},1\}$

【点睛】关键点点睛：利用集合子集个数得$\sin a_n$有且仅有2个对应值，根据等差数列定义、正弦型函数的周期性，转化为研究$\sin a_1,\sin a_2,\sin a_3$且必有两个相等为关键.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_1=3$，$(n+1)^2a_{n+1}+(2n+1)S_n=2$.

（1）求S_n；

（2）若$b_n=\frac{1}{n^2(2n-1)S_n}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

【答案】（1）$S_n=\frac{2n+1}{n^2}$；

（2）$\frac{n}{2n+1}$.

【解析】

【分析】（1）由题设及a_n,S_n关系得$(n+1)^2S_{n+1}-n^2S_n=2$，构造新数列并结合等差数列定义写出通项公式，进而可得S_n；

（2）应用裂项相消法求前n项和.

【小问1详解】

由题设$(n+1)^2(S_{n+1}-S_n)+(2n+1)S_n=2$，则$(n+1)^2S_{n+1}-n^2S_n=2$，

又$1^2\times S_1=a_1=3$，故$\{n^2S_n\}$是首项为3，公差为2的等差数列，

所以$n^2S_n=3+2(n-1)=2n+1$，则$S_n=\frac{2n+1}{n^2}$.

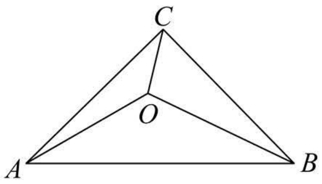
【小问2详解】

由（1）得$b_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，

所以$T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$.

18. 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，A为锐角，$\triangle ABC$的面积为S，

$4bS=a\left(b^2+c^2-a^2\right)$.



（1）判断$\triangle ABC$的形状，并说明理由；

（2）如图，若$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$，$BC=\sqrt{5}$，O为$\triangle ABC$内一点，且$OC=1$，$\angle AOC=\frac{3\pi}{4}$，求$OB$的长.

【答案】（1）直角三角形或钝角三角形

（2）2

【解析】

【分析】（1）利用面积公式及余弦定理代入化简，然后利用正弦定理边化角可得答案；

（2）由（1）的结果得到$\triangle ABC$为等腰直角三角形，然后解$\triangle AOC$，可得$\angle ACO$，进而可得$\angle BCO$，再解$\triangle BOC$即可求出OB的长.

【小问1详解】

Q$4bS=a\left(b^2+c^2-a^2\right)$，

$\therefore 4b\cdot\frac{1}{2}bc\sin A=a\cdot 2bc\cos A$，即$b\sin A=a\cos A$，

再由正弦定理边化角得$\sin B\sin A=\sin A\cos A$，

$\because \sin A\neq 0$，

$\therefore \sin B=\cos A$，又A为锐角，

$\therefore \sin B=\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$，

$\therefore B=\frac{\pi}{2}-A$或$B+\frac{\pi}{2}-A=\pi$，

$\therefore B+A=\frac{\pi}{2}$或$B=A+\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\triangle ABC$为直角三角形或钝角三角形；

【小问2详解】

由（1）的结果以及$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$，可得$\angle BAC=\angle ABC=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore\triangle ABC$为等腰直角三角形，又$BC=\sqrt{5}$，

$\therefore AC=BC=\sqrt{5}$，

在$\triangle AOC$中，

则$\cos\angle AOC=\dfrac{AO^2+1-5}{2AO}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得$AO=\sqrt{2}$，负值舍去，

又$\because \dfrac{AO}{\sin\angle ACO}=\dfrac{AC}{\sin\angle AOC}$，

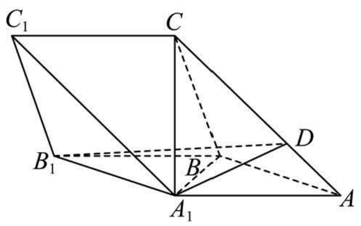
$\therefore \sin\angle ACO=\dfrac{AO\sin\angle AOC}{AC}=\dfrac{\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \cos\angle BCO=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\angle ACO\right)=\sin\angle ACO=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

在$\triangle BOC$中，$BO^2=OC^2+BC^2-2OC\cdot BC\cdot\cos\angle BCO=1+5-2\times\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=4$，

$\therefore BO=2$.

19. 如图，在三棱柱ABC-$A_1B_1C_1$中，$A_1A=A_1C=6$，$A_1C_1=6\sqrt{2}$，平面$A_1BC\perp$平面AA_1C_1C.



（1）求证：$BC\perp CC_1$；

（2）若$A_1B\perp A_1C$，三棱锥A_1-ABC的体积为18，点D在棱AC上，且$AD=\dfrac{1}{2}DC$，求平面A_1DB_1与平面ABC夹角的余弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

【解析】

【分析】（1）通过$A_1A\perp A_1C$以及平面$A_1BC\perp$平面AA_1C_1C，利用面面垂直的性质得$A_1A\perp$面A_1BC，进而利用三棱柱的性质可得$BC\perp CC_1$；

（2）先利用体积求出BA_1，在利用A_1B,A_1C,A_1A两两垂直建立空间直角坐标系，利用向量法可求面面角.

【小问1详解】

$\because A_1A = A_1C = 6$，$A_1C_1 = 6\sqrt{2}$，

$\therefore A_1A^2 + A_1C^2 = A_1C_1{}^2 = AC^2$，即$\triangle A_1AC$为直角三角形，

$\therefore A_1A \perp A_1C$，

又$\because$平面$A_1BC \perp$平面AA_1C_1C，平面$A_1BC \cap$平面$AA_1C_1C = A_1C$，$A_1A \subset$平面AA_1C_1C

\ A_1A ^ 面A_1BC，又$BC \subset$面A_1BC，

\ A_1A ^ BC，又$A_1A \parallel CC_1$，

$\therefore BC \perp CC_1$；

【小问 2 详解】

由（1）得$A_1A \perp$面A_1BC，又$A_1B \perp A_1C$，故A_1B, A_1C, A_1A两两垂直，

则$V_{A_1-ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle AA_1C} \cdot BA_1 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 6 \times 6 \times BA_1 = 18$，得$BA_1 = 3$，

如图建立空间直角坐标系，

则$A_1(0,0,0), A(6,0,0), B(0,3,0), C(0,0,6), B_1(-6,3,0), D(4,0,2)$，

设面A_1DB_1的法向量为$\vec{n} = (x, y, z)$，且$\overrightarrow{A_1D} = (4,0,2), \overrightarrow{A_1B_1} = (-6,3,0)$，

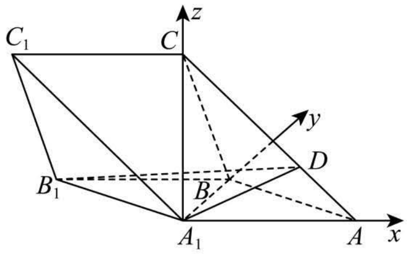
$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 4x + 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = -6x + 3y = 0 \end{cases}$，取$y = 2$得$\vec{n} = (1, 2, -2)$，

设面ABC的法向量为$\vec{m} = (x_0, y_0, z_0)$，且$\overrightarrow{AB} = (-6,3,0), \overrightarrow{AC} = (-6,0,6)$，

$\therefore \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = -6x_0 + 3y_0 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AC} = -6x_0 + 6z_0 = 0 \end{cases}$，取$x_0 = 1$得$\vec{m} = (1, 2, 1)$，

$\therefore \cos \vec{n}, \vec{m} = \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|} = \dfrac{1+4-2}{3 \times \sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

即平面A_1DB_1与平面ABC夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.



20. 2023 年 5 月 28 日我国具有完全自主知识产权的国产大飞机 C919 开启全球首次商业载客飞行，C919 飞机的研制，聚集了我国数十万科研人员的心血，其中 A、B、C、D、E、F 等高校为 C919 大飞机做出了重要贡献，如 A 高校参与了气动总体、结构强度、航电、飞控和液压等设计，参加人数如下表：

项目	气动总体	结构强度	航电	飞控	液压
参与人数	5	5	3	4	3

B 高校有 8 位教师参加了相关设计论证，具体如下表：

设计论证	气动总体设计论证	气动外形设计论证	结构强度论证	航电设计论证	液压系统论证	起落架的论证
参与教师	a	b,c	d	e,f	g	h

（1）某科普博主准备从 A、B、C、D、E、F 共 6 所高校中随机选 3 所高校介绍其为 C919 大飞机做出的贡献，连续 3 天，每天发布一篇博文，每篇博文介绍一所高校（3 天将选中的 3 所高校全部介绍完），求 C、D 被选到，且 C 在第 2 天被介绍的概率；

（2）若从 A 高校参与设计的 20 人中随机选 3 人，在选到航电设计人员的条件下，求选到气动总体设计人员的概率；

（3）若从 B 高校参与的 6 个论证项目中随机选取 3 个，记这 3 个论证项目中 B 高校参与教师人数为 X，求 X 的分布列与期望.

【答案】（1）$\dfrac{1}{15}$；

（2）$\dfrac{45}{92}$;

（3）X 的分布列为

X	3	4	5
P	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

$E\left(X\right)=3\times\dfrac{1}{5}+4\times\dfrac{3}{5}+5\times\dfrac{1}{5}=4$.

【解析】

【分析】（1）C、D 均被选到，且 C 在第 2 天被介绍有 $\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_4^1$ 种情况，再由古典概型的概率公式即可求得结果；

（2）从 A 高校参与设计的 20 人中随机选 3 人，选到航电设计人员，从对立事件求其概率；

选到气动总体设计人员的情况，也从对立事件求其概率，再结合条件事件的概率公式 $P\left(C|B\right)=\dfrac{P\left(BC\right)}{P\left(B\right)}$ 即可求得结果；

（3）6 个论证项目中，其中有 4 个项目 B 高校参与教师人数为 1 人；有 2 个项目 B 高校参与教师人数为 2 人，由分析可知，$X=3,4,5$，进而写出 X 的分布列，求出 $E\left(X\right)$.

【小问 1 详解】

C、D 均被选到，且 C 在第 2 天被介绍记为事件 A，

$\therefore P\left(A\right)=\dfrac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_4^1}{\mathrm{A}_6^3}=\dfrac{1}{15}$.

【小问 2 详解】

从 A 高校参与设计的 20 人中随机选 3 人，选到航电设计人员记为事件 B，

从 A 高校参与设计的 20 人中随机选 3 人，选到气动总体设计人员记为事件 C，

$\therefore P\left(B\right)=\dfrac{\mathrm{C}_{20}^3-\mathrm{C}_{17}^3}{\mathrm{C}_{20}^3}=\dfrac{460}{1140}$,

$P\left(BC\right)=\dfrac{\mathrm{C}_{20}^3-\left[\left(\mathrm{C}_3^3+\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_{12}^1+\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_{12}^2\right)+\left(\mathrm{C}_5^3+\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_{12}^1+\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_{12}^2\right)+\mathrm{C}_{12}^3\right]}{\mathrm{C}_{20}^3}=\dfrac{225}{1140}$,

$\therefore P\left(C|B\right)=\dfrac{P\left(BC\right)}{P\left(B\right)}=\dfrac{45}{92}$,

所以在选到航电设计人员的条件下，求选到气动总体设计人员的概率为$\frac{45}{92}$.

【小问 3 详解】

由题意知，$X=3,4,5$，

$\therefore P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5};P(X=4)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5};P(X=5)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$.

$\therefore X$ 的分布列为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$\therefore E(X)=3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{3}{5}+5\times\frac{1}{5}=4$.

21. 已知双曲线 Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，$A_1$，$A_2$ 为 Γ 的左、右顶点，$P\left(\sqrt{7},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 为 Γ 上一点，PA_1 的斜率与 PA_2 的斜率之积为$\frac{1}{4}$．过点 $A(3,0)$ 且不垂直于 x 轴的直线 l 与 Γ 交于 M，N 两点．

（1）求 Γ 的方程；

（2）若点 E，F 为直线 $x=3$ 上关于 x 轴对称的不重合两点，证明：直线 ME，NF 的交点在定直线上．

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}-y^2=1$；

（2）详见解析.

【解析】

【分析】（1）由题可知 $A_1(-a,0),A_2(a,0)$，根据条件列出方程组，进而即得；

（2）设直线 MN 的方程为 $x=ty+3,t\neq0$，联立双曲线方程求得 y_1+y_2,y_1y_2，再由直线 ME 和 NF 的方程，求得交点的横坐标，即可求解．

【小问 1 详解】

由题意得 $A_1(-a,0),A_2(a,0)$，又 $P\left(\sqrt{7},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 为 Γ 上一点，PA_1 的斜率与 PA_2 的斜率之积为$\frac{1}{4}$，

所以$\begin{cases}\frac{7}{a^2}-\frac{3}{4b^2}=1\\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}+a}\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}-a}=\frac{1}{4}\end{cases}$，解得 $a^2=4,b^2=1$，

所以双曲线Γ的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$；

【小问2详解】

设直线MN的方程为$x=ty+3, t\neq 0$，

由$\begin{cases} x=ty+3 \\ \dfrac{x^2}{4}-y^2=1 \end{cases}$，可得$\left(t^2-4\right)y^2+6ty+5=0$，则

$t^2-4\neq 0$，$\Delta=(6t)^2-20\left(t^2-4\right)>0$，

设$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，$E(3,m)$，$F(3,-m)$，$m\neq 0$，

所以$y_1+y_2=-\dfrac{6t}{t^2-4}, y_1y_2=\dfrac{5}{t^2-4}$，

直线l_{ME}：$y-m=\dfrac{y_1-m}{x_1-3}(x-3)$，$l_{NF}$：$y+m=\dfrac{y_2+m}{x_2-3}(x-3)$，

联立两方程，可得：

$$2m=\left(\frac{y_2+m}{x_2-3}-\frac{y_1-m}{x_1-3}\right)(x-3)=\left(\frac{y_2+m}{ty_2}-\frac{y_1-m}{ty_1}\right)(x-3)=\frac{m\left(y_1+y_2\right)}{ty_1y_2}(x-3)=\frac{-\frac{6tm}{t^2-4}}{\frac{5t}{t^2-4}}(x-3),$$

解得$x=\dfrac{4}{3}$，

当直线MN与x轴重合时，则$M(-2,0), N(2,0)$，

l_{ME}：$y=\dfrac{m}{5}(x+2)$，l_{NF}：$y=-m(x-2)$，联立可得$x=\dfrac{4}{3}$，

综上，直线ME与NF的交点在定直线$x=\dfrac{4}{3}$上.

22. 已知函数$f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2-(2a+1)x+2\ln x(a\in \mathrm{R})$.

（1）若$f(x)$有唯一极值，求a的取值范围；

（2）当$a\leq 0$时，若$f(x_1)=f(x_2)$，$x_1\neq x_2$，求证：$x_1x_2<4$.

【答案】（1）$a\leq 0$；

（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）求出函数$f(x)$的导数，分析极值点情况即可得解.

（2）由（1）的信息可设$0<x_1<2<x_2$，再构造函数，探讨函数的单调性推理即得.

【小问 1 详解】

函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(2a+1)x+2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

求导得 $f'(x)=ax-(2a+1)+\frac{2}{x}=\frac{(ax-1)(x-2)}{x}$，

当 $a>0$ 时，若 $a=\frac{1}{2}$，$f'(x)\geq 0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无极值点，不符合题意；

若 $0<a<\frac{1}{2}$，当 $0<x<2$ 或 $x>\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，当 $2<x<\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，

即函数 $f(x)$ 在 $(0,2),(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，在 $(2,\frac{1}{a})$ 上单调递减，函数 $f(x)$ 有两个极值点，不符合题意；

若 $a>\frac{1}{2}$，当 $0<x<\frac{1}{a}$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，当 $\frac{1}{a}<x<2$ 时，$f'(x)<0$，

即函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a}),(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a},2)$ 上单调递减，函数 $f(x)$ 有两个极值点，不符合题意；

当 $a\leq 0$ 时，当 $0<x<2$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，

即函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，2 是函数 $f(x)$ 的极大值点，且是唯一极值点，

所以 a 的取值范围是 $a\leq 0$.

【小问 2 详解】

当 $a\leq 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，

由 $f(x_1)=f(x_2)$，$x_1\neq x_2$，不妨令 $0<x_1<2<x_2$，

要证 $x_1x_2<4$，只证 $x_1<\frac{4}{x_2}$，即证 $f(x_1)<f\left(\frac{4}{x_2}\right)$，就证 $f(x_2)-f\left(\frac{4}{x_2}\right)<0$，

令 $g(x)=f(x)-f(\frac{4}{x}),x>2$，求导得 $g'(x)=f'(x)-f'(\frac{4}{x})\cdot(-\frac{4}{x^2})$

$$=\frac{(ax-1)(x-2)}{x}+\frac{(\frac{4a}{x}-1)(\frac{4}{x}-2)}{\frac{4}{x}}\cdot\frac{4}{x^2}=\frac{(ax-1)(x-2)+\frac{2}{x^2}(x-2)(x-4a)}{x}$$

$$=\frac{x-2}{x}(ax-1+\frac{2x-8a}{x^2})=\frac{x-2}{x}\cdot\frac{(x-2)[a(x^2+2x+4)-x]}{x^2}$$

$=\frac{(x-2)^2[a(x+1)^2+3a-x]}{x^3}<0$，于是函数 $g(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，$g(x)<g(2)=0$，

而 $x_2>2$，则 $g(x_2)<0$，即 $f(x_2)-f(\frac{4}{x_2})<0\Leftrightarrow f(x_2)<f(\frac{4}{x_2})$，又 $f(x_1)=f(x_2)$，

因此 $f(x_1)<f(\frac{4}{x_2})$，显然 $0<x_1<2, 0<\frac{4}{x_2}<2$，又函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，则有 $x_1<\frac{4}{x_2}$，

所以 $x_1x_2<4$.

【点睛】思路点睛：涉及函数的双零点问题，不管待证的是两个变量的不等式，还是导函数的值的不等式，都是把双变量的等式或不等式转化为一元变量问题求解，途径都是构造一元函数.