2024届高三第二次模拟考试参考答案

一、选择题

1．A　2．B　3．D　4．A　5．C　6．B　7．D　8．C

二、选择题

9．ACD　10．ABD　11．BD　12．AD

三、填空题

13．1　14．$\dfrac{15}{4}$　15．$\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right)$　16．$(-2,0)\cup(2,3)$

四、解答题

17．解:(1) 在$\triangle ABC$中，因为$b(\sin A+\cos A)=\left(\sqrt{3}-1\right)a\cos B+c$，

由正弦定理可得：$\sin B(\sin A+\cos A)=\left(\sqrt{3}-1\right)\sin A\cos B+\sin C$，

所以$\sin B(\sin A+\cos A)=\left(\sqrt{3}-1\right)\sin A\cos B+\sin(A+B)$，

所以$\sin A\sin B+\sin B\cos A=\left(\sqrt{3}-1\right)\sin A\cos B+(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$，

整理得$\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin A\cos B$，又$A\in(0,\pi)$，所以$\sin A>0$，

所以$\sin B=\sqrt{3}\cos B$，得$\tan B=\sqrt{3}$，……………………………………………4分

因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$．……………………………………………………5分

(2)由(1)知，$B=\dfrac{\pi}{3}$，又$a=1$，$b=\sqrt{3}$，

在$\triangle ABC$中，由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得$3=1+c^2-2\times1\times c\times\dfrac{1}{2}$，

所以$c^2-c-2=0$，则$c=2$，或$c=-1$（舍），………………………………8分

所以$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times1\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．…………………10分

18．解:(1)若选①，因为数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$，所以数列$\{a_n\}$为等比数列．

设$\{a_n\}$的公比为q，则$q>0$，由题意得$2(a_3+2)=2a_2+a_4$，

又$a_1=1$，可得$2\left(q^2+2\right)=2q+q^3$，即$q^3-2q^2+2q-4=0$，

则有$q^3+2q-2q^2-4=q\left(q^2+2\right)-2\left(q^2+2\right)=\left(q^2+2\right)(q-2)=0$，

因为$q^2+2>0$，解得$q=2$，故$a_n=2^{n-1}$．…………………………………………2分

若选②，因为$S_{n+1}-2S_n=1\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$，所以$S_{n+2}-2S_{n+1}=S_{n+1}-2S_n=1\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$，

所以$S_{n+2}-S_{n+1}=2\left(S_{n+1}-S_n\right)\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$，即$a_{n+2}=2a_{n+1}\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$；

当$n=1$时，有$S_2-2S_1=1$，即$a_2-a_1=1$，且$a_1=1$，则$a_2=2a_1$．

所以数列$\{a_n\}$是首项$a_1=1$，公比$q=2$的等比数列，所以$a_n=2^{n-1}$．…………4分

若选③，由$\left(S_{n+1}+1\right)a_n=\left(S_n+1\right)a_{n+1}$，得$\dfrac{S_{n+1}+1}{a_{n+1}}=\dfrac{S_n+1}{a_n}$，

所以$\dfrac{S_n+1}{a_n}=\dfrac{S_1+1}{a_1}=\dfrac{a_1+1}{a_1}=2$，所以$S_n=2a_n-1$．

当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，

所以$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-1-\left(2a_{n-1}-1\right)=2a_n-2a_{n-1}$，所以$a_n=2a_{n-1}$，

所以，数列$\{a_n\}$是以首项$a_1=1$，公比$q=2$的等比数列，所以$a_n=2^{n-1}$．………6分

(2)由(1)可知：数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{n}{a_n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$，

数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$　①

则$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}$　②

①—②可得：$\dfrac{1}{2}T_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$，

所以$T_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$，……………………………………………………………………8分

不等式$(\cos n\pi)\lambda<T_n+\dfrac{n}{2^{n-1}}$化为$(\cos n\pi)\lambda<4-\dfrac{2}{2^{n-1}}$，

可知数列$\left\{4-\dfrac{2}{2^{n-1}}\right\}$为递增数列．…………………………………………………9分

当n为偶数时，$\lambda<4-\dfrac{2}{2^{n-1}}$，取$n=2$，可得$\lambda<3$；………………………………10分

当n为奇数时，$-\lambda<4-\dfrac{2}{2^{n-1}}$，取$n=1$，可得$\lambda>-2$；……………………………11分

综上，实数λ的取值范围是$(-2,3)$．……………………………………………………12分

19．解:(1)由统计表数据可得：$\bar{x}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3$，

$\overline{y}=\dfrac{7+12+13+19+24}{5}=15$，…………………………………………………………………1 分

所以$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=16+3+0+4+18=41$， ……………………………………………2 分

$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}=\sqrt{64+9+4+16+81}=\sqrt{174}$，…………………………………………………3 分

$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{4+1+0+1+4}=\sqrt{10}$，……………………………………………………………4 分

所以相关系数$r=\dfrac{41}{\sqrt{1740}}\approx\dfrac{41}{41.7}\approx 0.98$，………………………………………………………5 分

因此，两个变量具有很强的线性相关性．………………………………………………………6 分

(2)由题意知，X 的可能取值为 0，1，2，3．……………………………………………7 分

因为$P(X=0)=\dfrac{C_5^0C_3^3}{C_8^3}=\dfrac{1}{56}$，$P(X=1)=\dfrac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\dfrac{15}{56}$，

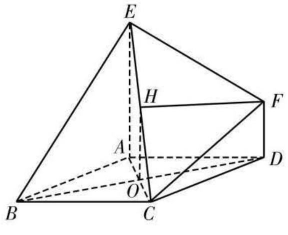
$P(X=2)=\dfrac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\dfrac{30}{56}=\dfrac{15}{28}$，$P(X=3)=\dfrac{C_5^3C_3^0}{C_8^3}=\dfrac{10}{56}=\dfrac{5}{28}$，………………………11 分

所以X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{56}$	$\dfrac{15}{56}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{5}{28}$

所以$E(X)=0\times\dfrac{1}{56}+1\times\dfrac{15}{56}+2\times\dfrac{15}{28}+3\times\dfrac{5}{28}=\dfrac{15}{8}$．…………………………………………12 分

20．解:(1)证明：如图，取EC 的中点H，连结BD交AC于点O，连结HO、HF．



因为四边形$ABCD$为菱形，则$AC\perp BD$．

又$AE\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，所以$AE\perp BD$．

因为$AE\subset$平面AEC，$AC\subset$平面AEC，且$AE\cap AC=A$，

所以$BD\perp$平面AEC．……………………………………………………………………2 分

因为H、O分别为EC、AC的中点，所以$HO//EA$，且$HO=\frac{1}{2}EA$；

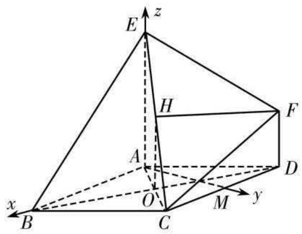
又$AE//DF$，且$DF=\frac{1}{2}EA$.

所以$HO//DF$，且$HO=DF$，所以四边形$HODF$为平行四边形，所以$HF//OD$，

即$HF//BD$，所以$HF\perp$平面AEC.

因为$HF\subset$平面CEF，所以平面$AEC\perp$平面CEF. ………………………………5分

(2)取CD中点M，连接AM. 因为菱形$ABCD$中，$\angle ABC=60°$，所以$\triangle ACD$为正三角形，又M为CD中点，所以$AM\perp CD$，因为$AB//CD$，所以$AM\perp AB$. 因为$AE\perp$平面$ABCD$，$AB,AM\subset$平面$ABCD$，所以$AE\perp AB$，$AE\perp AM$. 如图，以A为原点，AB,AM,AE所在直线分别为x,y,z轴，建立空间直角坐标系$A-xyz$. …………7分



不妨设$AB=AD=AE=2DF=2$，

则$A(0,0,0),B(2,0,0),C\left(1,\sqrt{3},0\right),D\left(-1,\sqrt{3},0\right),E(0,0,2),F\left(-1,\sqrt{3},1\right)$. ………………8分

因为$AM\perp$平面ABE，所以$\overrightarrow{AM}=\left(0,\sqrt{3},0\right)$为平面$ABE$的一个法向量，………9分

设平面CEF的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，因为$\overrightarrow{CE}=\left(-1,-\sqrt{3},2\right),\overrightarrow{CF}=(-2,0,1)$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=-x-\sqrt{3}y+2z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=-2x+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\ z=2x\end{cases}$，

不妨令$x=1$，得$\boldsymbol{n}=\left(1,\sqrt{3},2\right)$. ………11分

设平面ABE与平面CEF夹角为θ，

则$\cos\theta=\left|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{AM}>\right|=\frac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}\right|}{|\boldsymbol{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AM}\right|}=\frac{3}{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，…………………………11分

所以平面ABE与平面CEF夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$. …………………………………12分

21．解:(1)当$a=1$时，$f(x)=e^x-1-\ln x$，则$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，…………1分

所以$f'(1)=e-1$，……………………………………………………………………2分

又$f(1)=e-1$，……………………………………………………………………3分

故所求切线方程为$y-(e-1)=(e-1)(x-1)$，即$y=(e-1)x$．……………………4分

(2)因为$f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$，

所以当$a\geq 1$时，$f(x)-\sin x=a(e^x-1)-\ln x-\sin x\geq e^x-1-\ln x-\sin x$，

设$g(x)=e^x-1-\ln x-\sin x$，则$g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}-\cos x$，…………………………5分

设$h(x)=g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}-\cos x$，则$h'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}+\sin x>0$，………………6分

所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，则$h\left(\dfrac{1}{3}\right)=e^{\frac{1}{3}}-3-\cos\dfrac{1}{3}<0$，又$h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}-\dfrac{4}{\pi}-\sin\dfrac{\pi}{4}$，

因为$e^{\pi}>2.7^3>16=2^4$，所以$e^{\frac{\pi}{4}}>2$，

又$\dfrac{4}{\pi}+\sin\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{4}{3.14}+\dfrac{1.42}{2}\approx 1.984<2$，所以$h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>0$，

所以$h(x)$在$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{\pi}{4}\right)$上存在唯一零点$x_0$，也是$h(x)$在$(0,+\infty)$上的唯一零点，

所以$h(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}-\cos x_0=0$，即$e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}+\cos x_0$．…………………………9分

当$0<x<x_0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减；

当$x>x_0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(x_0+\infty)$上单调递增．

所以$g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-1-\sin x_0=\dfrac{1}{x_0}+\cos x_0-\ln x_0-1-\sin x_0$，………10分

由于$0<x_0<\dfrac{\pi}{4}$，所以$\dfrac{1}{x_0}>1$，$\ln x_0<0$，$\cos x_0>\sin x_0$，

所以$g(x)_{\min}=g(x_0)>0$，所以$g(x)>0$，…………………………………………11分

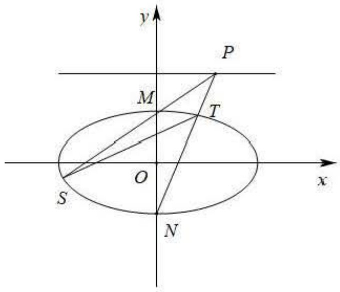
所以当$a\geq 1$时，$f(x)-\sin x>0$，即$f(x)>\sin x$成立．…………………………12分

22．解:(1)由题意知，$\triangle GHF_2$的周长为$4a$，则$4a=8$，所以$a=2$，…………1分

又 $c=\sqrt{3}$，则 $b^2=a^2-c^2=4-3=1$，……………………………………………………3 分

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$．……………………………………………………4 分

(2)如图，



由题意知，$M(0,1)$，$N(0,-1)$，直线 PS,PT,ST 斜率均存在．

设 $P(m,2)$，（$m\in\mathbf{R},m\neq 0$），则直线 $PS: y=\frac{x}{m}+1$，………………………………5 分

由 $\begin{cases} y=\frac{x}{m}+1 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$，消去 y 可得：$\left(m^2+4\right)x^2+8mx=0$，

因为 $\Delta=64m^2>0$ 恒成立，所以 $x_S+x_M=\frac{-8m}{m^2+4}$，………………………………6 分

即 $x_S=\frac{-8m}{m^2+4}$，所以 $y_S=\frac{-8m}{m^2+4}\times\frac{1}{m}+1=\frac{m^2-4}{m^2+4}$；

同理 $x_T=\frac{24m}{m^2+36}$，$y_T=\frac{36-m^2}{m^2+36}$，……………………………………………………8 分

所以 $k_{ST}=\frac{y_S-y_T}{x_S-x_T}=\frac{\frac{m^2-4}{m^2+4}-\frac{36-m^2}{m^2+36}}{\frac{-8m}{m^2+4}-\frac{24m}{m^2+36}}=\frac{144-m^4}{16m^3+192m}=\frac{\left(12-m^2\right)\left(12+m^2\right)}{16m\left(12+m^2\right)}=\frac{12-m^2}{16m}$，

…………10 分

所以直线 ST 方程为：$y=\frac{12-m^2}{16m}\left(x-\frac{-8m}{m^2+4}\right)+\frac{m^2-4}{m^2+4}=\frac{12-m^2}{16m}x+\frac{1}{2}$，…………11 分

所以直线 ST 过定点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$．……………………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。