郑州市 2024 年高中毕业年级第一次质量预测

数学　参考答案

一、单选题

CADAA　CBD

二、多选题

9.ABC　　10.CD　　11.ABD　　12.ACD

三、填空题

13. $\frac{4}{5}$;　　14. 276;　　15. $[-\frac{4}{3},0]$;　　16. $\frac{e}{2}$.

四、解答题

17.（1）样本的平均值为 $\overline{y}=(55\times0.01+65\times0.02+75\times0.034+85\times0.026+95\times0.01)\times10=75.6$，

所以乙生产线上产品指标 P 值的平均值估计为 75.6.——————————2 分

因为 $(0.01+0.02)\times10=0.3<0.5$，$(0.01+0.02+0.034)\times10=0.64>0.5$，

所以中位数在 $[70,80)$ 之间，设指标 P 值的中位数为 y，

所以 $y=0.1+0.2+(y-70)\times0.034=0.5$，解得 $y=70+\frac{0.2}{0.034}\approx75.88$. ————————4 分

由题中条件可知 $|\overline{x}-x|=|74-72|=2$，$|\overline{y}-y|=|75.6-75.88|=0.28<|\overline{x}-x|$，

所以乙生产线产品指标 P 值较甲产品指标 P 值更好.——————————6 分

（2）由频率分布直方图可知该样本中指标 P 值不小于 70 的频率为

（0.034+0.026+0.01）×10=0.7，所以指标 P 值不小于 70 的概率为 0.7，

$X \quad B(5,0.7)$，$E(X)=5\times0.7=3.5$，$D(X)=5\times0.7\times0.3=1.05$. ——————————10 分

18.解（1）由条件知，$\sqrt{3}\sin B\sin A+\cos B\sin A=\sin B+\sin(A+B)$，

即 $\sqrt{3}\sin B\sin A+\cos B\sin A=\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

即 $\sqrt{3}\sin B\sin A=\sin B+\cos A\sin B$，因为 $\sin B\neq0$，

所以 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，即 $2\sin(A-\frac{\pi}{6})=1$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.　　　　　　　　——————————————6 分

（2）因为 $AD=BD$，所以 $\angle DAB=\angle B$，$\angle CDA=2\angle B$，$\angle CAD=\frac{\pi}{3}-B$，$\angle ACD=\frac{2\pi}{3}-B$

在△CAD 中，由正弦定理得，$\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}$ ，即 $\dfrac{CD}{\sin(\dfrac{\pi}{3}-B)}=\dfrac{3CD}{\sin(\dfrac{2\pi}{3}-B)}$，

所以 $\sin(\dfrac{2\pi}{3}-B)=3\sin(\dfrac{\pi}{3}-B)$，即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cos B-\dfrac{3}{2}\sin B$ ，

整理得 $\sqrt{3}\cos B=2\sin B$，所以 $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　——————————12 分

19.解：（1）不妨设 $AB=1$，则 $BC=CE=2$，

在平行四边形 $ABCD$ 中，$\because$ $BC=2, AB=1$，$\angle ABC=60^\circ$，连接 AC，

由余弦定理得 $AC^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos60^\circ=3$，即 $AC=\sqrt{3}$，

$\because$ $AC^2+AB^2=BC^2$，$\therefore$ $AC\perp AB$.

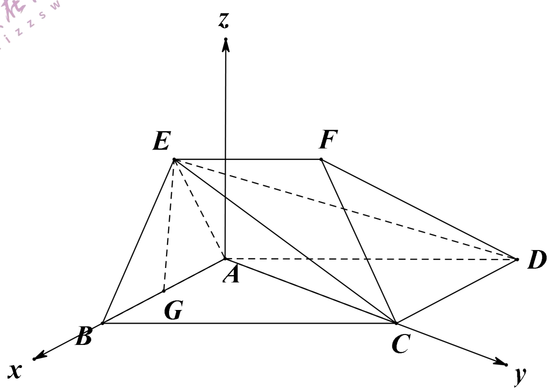
又$\because$ $AC^2+AE^2=CE^2$，$\therefore$ $AC\perp AE$，又 $AB\cap AE=A$，

$\therefore$ $AC\perp$平面 EAB，又$\because$ $AC\subset$平面 $ABCD$，

$\therefore$平面 $EAB\perp$平面 $ABCD$.　——————————————————5 分

（2）取 AB 中点 G，连接 EG，$\because$ $EA=EB$，$\therefore$ $EG\perp AB$，

由（1）易知 $EG\perp$平面 $ABCD$，且 $EG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



如图，以 A 为原点，分别以射线 AB，AC 为 x，y 轴的正半轴，建立空间直角坐标系 A-xyz，

则 $E(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}),F(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，

$C(0,\sqrt{3},0),D(-1,\sqrt{3},0)$，$B_1(-2,2\sqrt{3},0)$，$C_1(-1,2\sqrt{3},\sqrt{3})$

$\overrightarrow{CD}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{FC}=(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{EC}=(-\dfrac{1}{2},\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

设平面 FCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{FC}=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}-x=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，得 $\vec{n}=(0,1,1)$，

设平面 ECD 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}-x=0,\\ -\dfrac{1}{2}x+\sqrt{3}y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，得 $\vec{m}=(0,1,2)$，

$$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10},$$

即平面 ECD 与平面 FCD 夹角的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$．　　————————————————12 分

20. 解：（1）由已知得，$a_{n+1}^2-4a_{n+1}+4=a_n^2$，即 $(a_{n+1}-2)^2=a_n^2$.

又 $a_n>0$ 且 $a_1=2$，得 $a_{n+1}-2=a_n$，即 $a_{n+1}-a_n=2$．

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项， 2 为公差的等差数列，$a_n=2+(n-1)2=2n$.

当 $n=1$ 时，$\dfrac{b_1}{1}=2$，得 $b_1=2$.

当 $n\geq 2$ 时，$\dfrac{b_n}{2^{n-1}}=2n-2(n-1)=2,$　　得 $b_n=2^n$，

当 $n=1$ 时，$b_1=2$ 也适合上式，故 $b_n=2^n$.　　-------------------------6 分

（2）在 b_n 和 b_{n+1} 之间插入 n 个数 $c_{n_1},c_{n_2},c_{n_3},\cdots c_{n_n}$，使得 $b_n,c_{n_1},c_{n_2},c_{n_3},\cdots c_{n_n},b_{n+1}$ 成等差数列，设其公差为 d，则 $c_{n_1}=b_n+d$，$c_{n_n}=b_{n+1}-d$.

$$S_n=c_{n_1}+c_{n_2}+c_{n_3}+\cdots c_{n_n}=\frac{n(b_n+d+b_{n+1}-d)}{2}=\frac{n(2^n+2^{n+1})}{2}=3n\cdot 2^{n-1}$$

$T_n=3\cdot 2^0+6\cdot 2^1+9\cdot 2^2+\cdots+3(n-1)\cdot 2^{n-2}+3n\cdot 2^{n-1}$ ---------------------------------①

$2T_n=3\cdot 2^1+6\cdot 2^2+9\cdot 2^3+\cdots+3(n-1)\cdot 2^{n-1}+3n\cdot 2^n$ ----------------------------------②

①—②得 $-T_n=3\cdot 2^0+3\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+3\cdot 2^{n-1}-3n\cdot 2^n$

$-T_n=3\dfrac{1-2^{n-1}\cdot 2}{1-2}-3n\cdot 2^n=-3+(3-3n)\cdot 2^n$，　$T_n=(3n-3)\cdot 2^n+3$.————12 分

21. 解：（1）由题意可知，点 A 的坐标为 $(0,2)$，所以 $k_{AB}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故直线 AB 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$，

与双曲线联立 $\begin{cases} y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2, \\ \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{2}=1 \end{cases}$ 得 $3x^2+4\sqrt{2}x=0$，

解得 $x_1=0$ 或 $x_2=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$，

故点 D 的坐标为 $\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3},\frac{10}{3}\right)$. ——————————5 分

（2）直线 l 与双曲线 C 联立 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{2}=1 \end{cases}$

整理得 $(k^2-2)x^2+2kmx+m^2-4=0$，

因为 $k\neq\pm\sqrt{2}$， P 是双曲线与直线 l 的唯一公共点，

所以 $\Delta=(2km)^2-4(k^2-2)(m^2-4)=0$，

即 $m^2=4-2k^2=2(2-k^2)$，

解得点 P 的坐标为 $\left(\frac{-km}{k^2-2},\frac{-2m}{k^2-2}\right)$，即 $\left(\frac{2k}{m},\frac{4}{m}\right)$，其中 $km\neq0$.

过点 P 且与 l 垂直的直线为 $y-\frac{4}{m}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{2k}{m}\right)$，

可得 $M\left(\frac{6k}{m},0\right)$， $N\left(0,\frac{6}{m}\right)$.

所以 $Q\left(\frac{6k}{m},\frac{6}{m}\right)$，即 $x=\frac{6k}{m}$， $y=\frac{6}{m}$，

故 $x^2=\left(\frac{6k}{m}\right)^2=\frac{36k^2}{m^2}=\frac{18(4-m^2)}{m^2}=\frac{72}{m^2}-18=2\left(\frac{6}{m}\right)^2-18=2y^2-18$，

即 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{18}=1(x\neq0)$.————————————12 分

22. 证明：（1）由题意可知，函数 $f(x)$ 的定义域为 R ， $f(x)$ 为偶函数，先令 $x \geq 0$ ，

$f'(x)=\dfrac{1}{2}ax-\sin x$ ，又 $a \geq 1$ ，故 $f'(x)=\dfrac{1}{2}ax-\sin x \geq x-\sin x$ ，

令 $g(x)=x-\sin x$ ， $g'(x)=1-\cos x \geq 0$ ， $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x) \geq 0$ ，即 $f'(x) \geq 0$ ，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x \geq 0$ 时， $f(x) \geq f(0)=0$ ，

又 $f(x)$ 为偶函数，故 $f(x) \geq 0$.　　　　　　————————————5 分

（2）由（1）可知，当 $a=1$ 时， $\dfrac{1}{2}x^2+\cos x-1 \geq 0$ ，

即 $cos\,x \geq 1-\dfrac{1}{2}x^2$ ，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

令 $x=\dfrac{1}{n}$ ， $n \geq 1且n \in N^*$ ， $\cos\dfrac{1}{n}>1-\dfrac{1}{2n^2}$ ，

即 $\cos\dfrac{1}{n}>1-\dfrac{1}{2n^2}>1-\dfrac{2}{4n^2-1}=1-\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ ，

由（1）可知，当 $x \geq 0$ 时， $x>\sin x$ ，

又 $n \geq 1且n \in N^*$ ，故 $0<\dfrac{1}{n} \leq 1$ ，所以 $\dfrac{1}{n}>\sin\dfrac{1}{n}=\cos\dfrac{1}{n}\cdot\tan\dfrac{1}{n}$ ，

即 $\dfrac{\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n}}>\cos\dfrac{1}{n}$ ，即 $\dfrac{1}{n\cdot\tan\frac{1}{n}}>\cos\dfrac{1}{n}>1-\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ ，

$$\frac{1}{\tan 1}+\frac{1}{2\tan\frac{1}{2}}+\frac{1}{3\tan\frac{1}{3}}+\cdots\frac{1}{n\tan\frac{1}{n}}>1-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+1-\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=n-\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=n-1+\frac{1}{2n+1}=n-\frac{2n}{2n+1}$$

即证： $\dfrac{1}{\tan 1}+\dfrac{1}{2\tan\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{3\tan\frac{1}{3}}+\cdots\dfrac{1}{n\tan\frac{1}{n}}>n-\dfrac{2n}{2n+1}$.————————————12 分