

2023届5月质量监测考试

理科数学

试卷满分:150分 考试时间:120分钟

注意事项:

1. 答题前,考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚,将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 全部答案在答题卡上完成,答在本试卷上无效。
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案用0.5mm黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

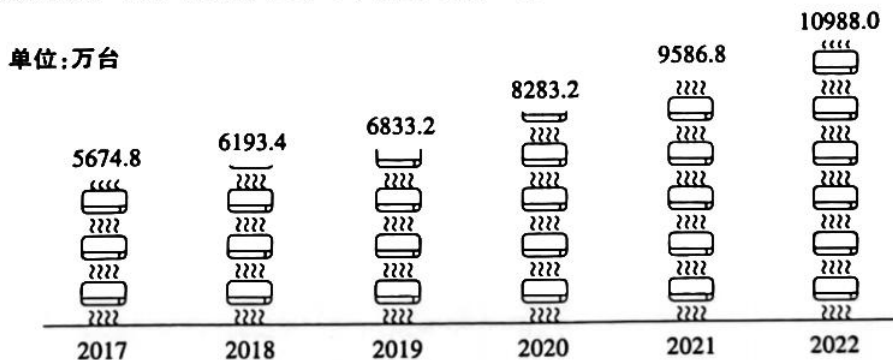
1. 已知集合 $A = \left\{x \mid x^2 < \frac{1}{2}\right\}$, $B = \left\{x \mid y = \sqrt{\log_{0.5} x}\right\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $\left\{x \mid 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ B. $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x \mid x \leq 1\}$ D. $\left\{x \mid -\frac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 1\right\}$

2. 已知 $z = 1 - i$, 则 $\frac{1+i}{z+2z} =$

- A. $-\frac{7}{10} + \frac{1}{5}i$ B. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}i$ C. $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$ D. $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

3. 近年来,随着双碳目标、空调新国标的制定,节能变频空调的需求不断增多,下图为2017-2022中国节能变频空调产量,根据该图,下列说法错误的是



- A. 2017-2022中国节能变频空调年产量逐年增加
 B. 2017-2022中国节能变频空调年产量的中位数6833.2万台
 C. 2022年中国节能变频空调产量比上一年增长超过14%
 D. 2017-2022中国节能变频空调年平均产量超过7500台
4. 公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + 2a_5 = 6$, 则下列各式一定成立的是
- A. $a_3 a_5 < 2$ B. $a_3 a_5 < 4$ C. $a_2 a_5 < 2$ D. $a_2 a_5 < 4$
5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的左焦点为 F , 过原点 O 的直线与 C 交于点 A, B , 若 $|OF| = |OA|$, 则 $|AF| \cdot |BF| =$
- A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

6. $(\frac{2}{x} - x)^4$ 的展开式中的常数项与 $(x - \frac{1}{x^2} + a)^3$ 展开式中的常数项相等, 则 a 的值为

- A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

7. 陀螺又称陀罗, 是中国民间最早的娱乐健身玩具之一, 在山西夏县新石器时代的遗址中就发现了石制的陀螺. 如图所示的陀螺近似看作由一个圆锥与一个圆柱组成的组合体, 其中圆柱的底面半径为 1, 圆锥与圆柱的高均为 1, 若该陀螺由一个球形材料削去多余部分制成, 则球形材料体积的最小值为

- A. $\frac{4}{3}\pi$ B. $\frac{32}{3}\pi$
C. $\frac{25}{4}\pi$ D. $\frac{125}{48}\pi$



8. 已知 $a = \log_3 5$, $b = 2(\frac{1}{3})^{\frac{1}{4}}$, $c = 3 \log_2 2 + \log_2 7$, 则

- A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $b > a > c$ D. $c > a > b$

9. 若过原点与曲线 $f(x) = x^2 e^x + ax^2 - 2x$ 相切的直线有 2 条, 且切点均与原点不重合, 则 a 的取值范围是

- A. $(e^{-2}, +\infty)$ B. $(-\infty, e^{-2})$ C. $(0, e^{-2})$ D. $(0, e^{-2}]$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 \sin 2x, & x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \tan x, & x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$, 若方程 $f(x) = \sqrt{3}$ 在 $(0, m)$ 上恰有 5 个不同实根, 则 m 的取值范围是

- A. $(\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}]$ B. $(\frac{7\pi}{3}, \frac{19\pi}{6}]$ C. $(\frac{5\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}]$ D. $(\frac{13\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}]$

11. 若非零向量 a, b 夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 则 $\frac{|a+3b|}{|b|}$ 的最小值为

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

12. 若椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上存在一点 D , 使得函数 $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ 图象上任意一点关于点 D 的对称点仍在 $f(x)$ 的图象上, 且椭圆 C 的长轴长大于 2, 则 C 的离心率的取值范围是

- A. $(0, \frac{\sqrt{210}}{15})$ B. $(\frac{\sqrt{210}}{15}, 1)$ C. $(0, \frac{\sqrt{6}}{3})$ D. $(\frac{\sqrt{6}}{3}, 1)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知某小麦品种的株高 X (单位: cm) 服从正态分布 $N(78, \sigma^2)$, 且 $P(76 < X \leq 80) = 0.80$, 现从该品种小麦中任取 2 株, 则这 2 株小麦株高都超过 80cm 的概率为_____.

14. 已知圆心在 x 轴正半轴上的圆 C 过原点 O , 且与直线 $y = x - 2$ 相交所得的弦长为 $\sqrt{34}$, 则圆 C 的标准方程为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} = (2^n + 1)a_n - 1$, 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 k 为大于 1 的奇数, 则 $S_k =$ _____.

16. 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 4$, 点 E 为 A_1B_1 中点, 点 F 为 AD 中点, 直线 B_1C 与直线 EF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{143}}{13}$, 过 E, F, C_1 作该正四棱柱的截面, 则截面周长为_____.

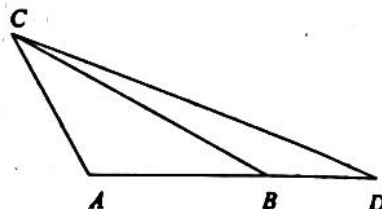
三、解答题：共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必考题：共60分.

17. (12分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = \frac{\sqrt{3}}{3} BC$ ，点 D 在 AB 延长线上，且 $AD = \frac{5}{2} BD$.

(1) 求 $\frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle BCD}$;

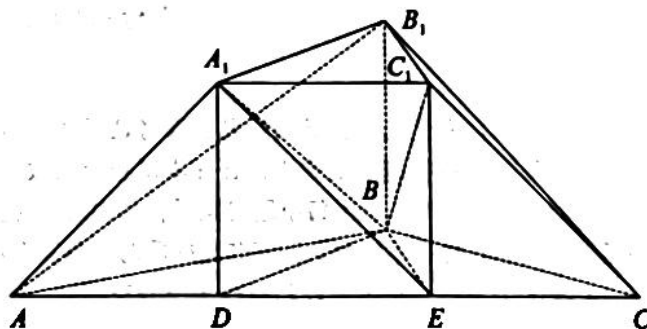
(2) 若 $\triangle ABC$ 面积为 $\sqrt{3}$ ，求 CD .



(12分) 在几何体 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = BC = \sqrt{3}$ ， $AC = 3$ ，点 D, E 在棱 AC 上，且 $AD = DE = EC$ ，三棱柱 $DBE - A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，且 $DE = DA_1$.

(1) 求证：平面 $A_1BE \perp$ 平面 ABB_1 ;

(2) 求平面 A_1BC_1 与平面 AA_1B_1 所成角的正弦值.



19. (12分) MCN即多频道网络,是一种新的网红经济运行模式,这种模式将不同类型的PGC(专业生产内容)联合起来,在资本有力支持下,保障内容的持续输出,从而最终实现商业的稳定变现,在中国以直播电商、短视频为代表的新兴网红经济的崛起,使MCN机构的服务需求持续增长.数据显示,近年来中国MCN市场规模迅速扩大.下表为2018年-2022年中国MCN市场规模(单位:百亿元),其中2018年-2022年对应的代码依次为1-5.

年份代码 x	1	2	3	4	5
中国MCN市场规模 y	1.12	1.68	2.45	3.35	4.32

(1) 由上表数据可知,可用指数函数模型 $y = a \cdot b^x$ 拟合 y 与 x 的关系,请建立 y 关于 x 的回归方程;

(2) 从2018年-2022年中国MCN市场规模中随机抽取3个数据,记这3个数据中与 \bar{y} 的差的绝对值小于1的个数为 X ,求 X 的分布列与期望.

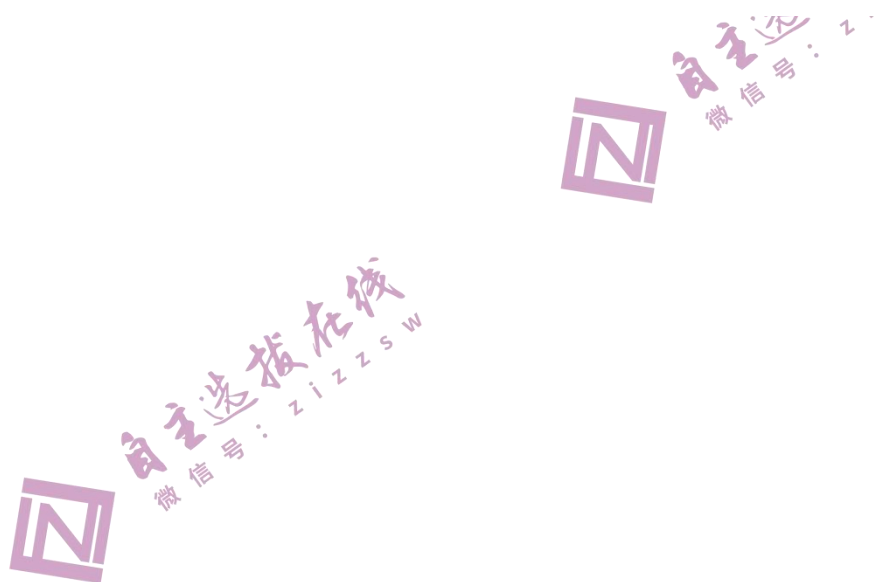
参考数据:

\bar{y}	\bar{v}	$\sum_{i=1}^5 x_i y_i$	$\sum_{i=1}^5 x_i v_i$
2.58	0.84	46.83	15.99

其中 $v_i = \ln y_i$, $\bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i$, $\bar{v} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 v_i$.

参考公式:对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$,其回归直线 $\hat{v} = \hat{a} + \hat{\beta}u$ 的斜率和截

距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}$, $\hat{a} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}$.



20. (12分) 过点 $M(t, 0)$, 斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 相切于点 N , 且 $|MN| = 4\sqrt{3}$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的直线与 C 交于与点 N 不重合的点 P, Q , 判断是否存在直线 l' , 使得点 Q 关于 l' 的对称点 Q' 恒与 P, N 共线, 若存在, 求出 l' 的方程, 若不存在, 说明理由.

21. (12分) 已知 $f(x) = (x - a - 1)e^x - \frac{1}{2}ax^2 + a^2x - 1. (a \in \mathbf{R})$

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a = -1$, 且存在 $x \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x) \leq \ln x + \frac{1}{2}x^2 + (b + 1)x$, 求 b 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{1-t} + \sqrt{1+t} \\ y = \sqrt{1-t} - \sqrt{1+t} \end{cases}$, (t 为参数), 以坐标原

点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \sin \theta + 1 = a (a > 0)$.

(1) 求 C_1 的普通方程及 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若曲线 C_1, C_2 没有公共点, 求 a 的取值范围.

23. [选修4—5：不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = x^2 - |x - 3|$.

(1) 求不等式 $f(x) > |x|$ 的解集;

(2) 若对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) > x^2 - 2 - |x - a|$, 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

