长郡中学 2023 年下学期高二期末考试

数学参考答案

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	B	D	C	C	B	A	C	D	BCD	BC	ACD	ABD

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. B 【解析】因为一条直线经过两点$(1,0)$,$(2,\sqrt{3})$,所以该直线的斜率为$\dfrac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}$,则有该直线的倾斜角满足 $\tan\alpha=\sqrt{3}$,因为$\alpha\in[0,\pi)$,所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.故选 B.

2. D 【解析】因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以存在唯一实数 λ,使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,

则$\begin{cases}m=-\lambda,\\0=0,\\1=4\lambda,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m=-\dfrac{1}{4},\\\lambda=\dfrac{1}{4},\end{cases}$ 故选 D.

3. C 【解析】六名学生分成两组,每组不少于两人的分组,一组 2 人另一组 4 人,或每组 3 人,所以不同的分配方案为:$C_6^2A_2^2+C_6^3=50$.故选 C.

4. C 【解析】$\because f'(x)=\ln x+1$,$\therefore f'(1)=1$,又$\because f(1)=0$,$\therefore$切线过点$(1,0)$,$\therefore$在点 $x=1$ 处曲线 $f(x)$的切线方程为 $y=x-1$.故选 C.

5. B 【解析】首先,$p(\xi=3)=\dfrac{1}{2}\cos^2\theta$,所以 $E(\xi)=\dfrac{1}{2}\sin^2\theta+2\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\cos^2\theta=\dfrac{3}{2}+\cos^2\theta$,

$\because\theta\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$,$\dfrac{1}{2}\leqslant\cos\theta\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,从而 $\cos^2\theta\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$.

$\therefore E(\xi)=\dfrac{3}{2}+\cos^2\theta\in\left[\dfrac{7}{4},\dfrac{9}{4}\right]$.故 $E(\xi)$有最大值$\dfrac{9}{4}$,最小值$\dfrac{7}{4}$.故选 B.

6. A 【解析】设此数列为$\{a_n\}$,则 $a_1=3$,$a_2-a_1=1$,$a_3-a_2=2$,……,

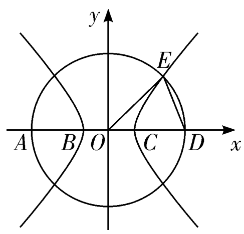
$a_n-a_{n-1}=n-1(n\geqslant2)$,

所以 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+3=\dfrac{(n-1+1)(n-1)}{2}+3=\dfrac{n(n-1)}{2}+3$,

所以 $a_{19}=\dfrac{19\times18}{2}+3=174$.故选 A.

7. C 【解析】设双曲线的标准方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,



设圆 O 与双曲线在第一象限内的交点为 E,连接 DE、OE,

则$|OE|=|OD|=|OC|+|CD|=3|OC|=3a$,

因为坐标轴和双曲线与圆 O 的交点将圆 O 的周长八等分,则$\angle DOE=\dfrac{1}{8}\times2\pi=\dfrac{\pi}{4}$,

故点 $E\left(\dfrac{3\sqrt{2}a}{2},\dfrac{3\sqrt{2}a}{2}\right)$,

将点 E 的坐标代入双曲线的方程可得$\dfrac{\left(\dfrac{3\sqrt{2}a}{2}\right)^2}{a^2}-\dfrac{\left(\dfrac{3\sqrt{2}a}{2}\right)^2}{b^2}=1$,所以$\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{9}{7}$,

所以,该双曲线的离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$.故选 C.

8. D 【解析】由题可知 $f'(x)=e^x(x^2-4x-4+2x-4)+\dfrac{1}{2}k\cdot(2x+4)=(x+2)[e^x(x-4)+k]$,

$\because x=-2$ 是 $f(x)$的唯一极小值点,

$\therefore e^x(x-4)+k\geqslant0$ 恒成立,即$-k\leqslant e^x(x-4)$恒成立.

令 $g(x)=e^x(x-4)$,则 $g'(x)=e^x(x-3)$.

当 $x<3$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减;

当 $x>3$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增.

$\therefore g(x)_{\min}=g(3)=-e^3$,$\therefore -k\leqslant-e^3$,即 $k\geqslant e^3$.故选 D.

二、选择题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分,在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分)

9. BCD 【解析】对于 A,展开式有 7 项,故 A 错误;

对于 B,常数项为 $C_6^3x^3\left(-\frac{1}{x}\right)^3=-20$,故 B 正确;

对于 C,所有项的二项式系数和为 $2^6=64$,故 C 正确;

对于 D,令 $x=1$,得所有项的系数和为 $(1-1)^6=0$,故 D 正确;

故选 BCD.

10. BC 【解析】选项 A,$\because a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=0$,$\therefore 5a_{13}=0$,即 $a_{13}=0$,$a_{15}\neq 0$,故 A 错误;

选项 B,$\because$公差 $d<0$,$\therefore$等差数列$\{a_n\}$为单调递减数列,又 $a_{15}+a_{10}=a_{12}+a_{13}>0$,

$\therefore a_{10}>-a_{15}$,即$|a_{10}|>|a_{15}|$,故 B 正确;

选项 C,$S_{25}=\frac{(a_1+a_{25})\times 25}{2}=25a_{13}=0$,故 C 正确;

选项 D,$\because$等差数列$\{a_n\}$为递减数列,$a_{13}=0$,

$\therefore a_1>0,a_2>0,\cdots\cdots,a_{12}>0,a_{13}=0,a_{14}<0$,

$\therefore S_n$ 最大值为 S_{12} 或 S_{13},故 D 错误. 故选 BC.

11. ACD 【解析】对于 A,$f'(x)=3x^2-6x$,令 $f'(x)=0$ 可得 $x=0$ 或 2. 当 $x<0$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$单调递增,当 $0<x<2$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$单调递减,当 $x>2$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$单调递增. 所以 0 是 $f(x)$的极大值点,2 是 $f(x)$的极小值点,所以 $f(x)$有两个极值点,故 A 正确;

对于 B,$f(0)=4$,$f(2)=0$,根据图象,$f(x)$只有 2 个零点,故 B 错误;

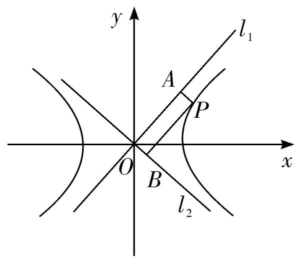
对于 C,由于 $f(x)$在$[-1,0]$递增,在$[0,2]$递减,在$[2,4]$递增,且 $f(-1)=f(2)=0$,$f(0)=4$,$f(4)=20$,所以 $f(x)$在$[-1,4]$上的值域为$[0,20]$,故 C 正确;

对于 D,验证 $f(x)+f(2-x)=4$,

$\because f(x)+f(2-x)=x^3-3x^2+4+(2-x)^3-3(2-x)^2+4=4$,成立,故 D 正确.

故选 ACD.

12. ABD 【解析】如图所示,设 $P(x_0,y_0)$,则$\frac{x_0^2}{3}-y_0^2=1$,



由题设条件,知双曲线 C 的两条渐近线为 $l_1:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$,$l_2:y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$,

设直线 PA、PB 的斜率分别为 k_1、k_2,则 $k_1=-\sqrt{3}$,$k_2=\sqrt{3}$,

所以 $k_1\cdot k_2=-3$,故 A 正确;

由$|PA|=m=\frac{|\sqrt{3}x_0-3y_0|}{2\sqrt{3}}$,$|PB|=n=\frac{|\sqrt{3}x_0+3y_0|}{2\sqrt{3}}$,

$\therefore mn=\frac{|3x_0^2-9y_0^2|}{12}=\frac{9}{12}\times\left|\frac{x_0^2}{3}-y_0^2\right|=\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$,故 B 正确;

$\because 4m+n\geqslant 2\sqrt{4mn}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,当且仅当 $4m=n=\sqrt{3}$ 时等号成立,故 C 不正确;

在四边形 $AOBP$ 中,易知$\angle APB=120^\circ$,$|AB|=\sqrt{PA^2+PB^2-2|PA|\cdot|PB|\cdot\cos\angle APB}=\sqrt{m^2+n^2-2mn\left(-\frac{1}{2}\right)}\geqslant\sqrt{3mn}=\frac{3}{2}$,当且仅当 $m=n=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,等号成立,故 D 正确. 故选 ABD.

三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 1 【解析】依题意:数列$\{a_n\}$为等比数列,且公比为 $q=2$,

由 $S_7=\frac{a_1(1-2^7)}{1-2}=127a_1=127$,得 $a_1=1$,

故答案为:1.

14. $\sqrt{2}+1$ 【解析】因为 $f(x)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x-\cos x$,所以 $f'(x)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin x$,

所以 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}$,解得 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+1$,故答案为:$\sqrt{2}+1$.

15. $x=-\frac{3}{2}$ 【解析】不妨设 $P\left(\frac{p}{2},p\right)$，$\therefore Q\left(6+\frac{p}{2},0\right)$，$\overrightarrow{PQ}=(6,-p)$.

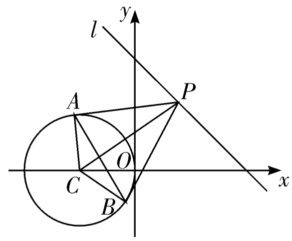
因为 $PQ\perp OP$，所以 $\frac{p}{2}\times 6-p^2=0$，$\because p>0$，$\therefore p=3$，$\therefore C$ 的准线方程为 $x=-\frac{3}{2}$，故答案为：$x=-\frac{3}{2}$.

16. $3x+3y+1=0$ 【解析】$\because$ 圆 C：$x^2+2x+y^2=0$ 可化为 $(x+1)^2+y^2=1$，

$\therefore C(-1,0)$，$r=1$，

$\because PA$，PB 是圆 C 的两条切线，则 $PA\perp AC$，$PB\perp BC$，

$\therefore A$、P、B、C 四点共圆，且 $AB\perp CP$，$PA=PB$，



$\therefore |PC|\cdot|AB|=4S_{\triangle PAC}=4\times\frac{1}{2}\times|PA|\times|AC|=2|PA|$，

$\because |PA|=\sqrt{|PC|^2-1}$，

$\therefore$ 当 $|PC|$ 最小，即 $PC\perp l$ 时，$|PC|\cdot|AB|$ 取得最小值，

此时 PC 方程为 $y=x+1$，

联立 $\begin{cases}y=x+1,\\x+y-2=0,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{3}{2}$，即 $P\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，

$\therefore$ 以 PC 为直径的圆的方程为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)+y\left(y-\frac{3}{2}\right)=0$，

即 $x^2+\frac{1}{2}x+y^2-\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}=0$，

$\because$ 圆 C：$x^2+2x+y^2=0$，两圆相交，

$\therefore$ 两圆方程相减即为 AB 的方程 $3x+3y+1=0$.

故答案为：$3x+3y+1=0$.

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17.【解析】(1) 由 $b_n=a_n-3$，得 $b_{n+1}=a_{n+1}-3$，又 $a_{n+1}=3a_n-6$，

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}-3}{a_n-3}=\frac{3a_n-6-3}{a_n-3}=\frac{3(a_n-3)}{a_n-3}=3$，且 $b_1=a_1-3=-1$，

所以 $\{b_n\}$ 是等比数列，$b_n=-3^{n-1}$. ………………………………………………………… 5 分

(2) 由(1)得 $b_n=a_n-3=-3^{n-1}$，得 $a_n=3-3^{n-1}$，

所以 $T_n=(3+3+\cdots+3)-(1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})=3n-\frac{1-3^n}{1-3}=-\frac{3^n}{2}+3n+\frac{1}{2}$，

即 $T_n=-\frac{3^n}{2}+3n+\frac{1}{2}$. ………………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1) 设点 P 的坐标为 (x,y)，点 A 的坐标为 (x_0,y_0)，

由于点 B 的坐标为 $(6,5)$，且点 P 是线段 AB 的中点，所以 $x=\frac{x_0+6}{2}$，$y=\frac{y_0+5}{2}$，

于是有 $\begin{cases}x_0=2x-6,\\y_0=2y-5,\end{cases}$ ①

因为点 A 在圆 C_1：$(x-4)^2+(y-3)^2=4$ 上运动，即：$(x_0-4)^2+(y_0-3)^2=4$， ②

把①代入②，得 $(2x-6-4)^2+(2y-5-3)^2=4$，整理，得 $(x-5)^2+(y-4)^2=1$，

所以点 P 的轨迹 C_2 的方程为 $(x-5)^2+(y-4)^2=1$. ………………………………………… 6 分

(2) 将圆 C_1：$(x-4)^2+(y-3)^2=4$ 与圆 C_2：$(x-5)^2+(y-4)^2=1$ 的方程相减得：

$2x+2y-19=0$，………………………………………………………………………………… 8 分

由圆 C_2：$(x-5)^2+(y-4)^2=1$ 的圆心为 $(5,4)$，半径为 1，

且 $(5,4)$ 到直线 $2x+2y-19=0$ 的距离 $d=\frac{|10+8-19|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

则 $|MN|=2\sqrt{1-\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$. ………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1 的事件为 M,

则 $P(M)=\frac{C_8^4}{C_{10}^5}=\frac{5}{18}$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)由题意知 X 的取值为 0,1,2,3,4.

$P(X=0)=\frac{C_6^5}{C_{10}^5}=\frac{1}{42}$,$P(X=1)=\frac{C_6^4C_4^1}{C_{10}^5}=\frac{5}{21}$,$P(X=2)=\frac{C_6^3C_4^2}{C_{10}^5}=\frac{10}{21}$,

$P(X=3)=\frac{C_6^2C_4^3}{C_{10}^5}=\frac{5}{21}$,$P(X=4)=\frac{C_6^1C_4^4}{C_{10}^5}=\frac{1}{42}$,

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

$\therefore E(X)=0+1\times\frac{5}{21}+2\times\frac{10}{21}+3\times\frac{5}{21}+4\times\frac{1}{42}=2$. ………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)证明:如图,连接 OC,

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中,由 $BD=4$,可得 $OC=2$,

$\because PB=PD=\sqrt{5}$,$OB=OD=2$,

$\therefore OP\perp BD$,$OP=\sqrt{PB^2-OB^2}=\sqrt{5-4}=1$.

$\because OP=1$,$OC=2$,$PC=\sqrt{5}$.

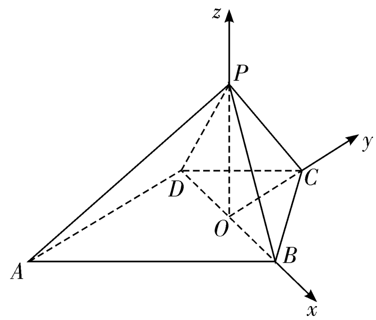
则 $PC^2=OP^2+OC^2$,故 $OP\perp OC$.

$\because OP\perp BD$,$BD\cap OC=O$,BD,$OC\subset$平面 $ABCD$.

$\therefore OP\perp$平面 $ABCD$. ………………………………………………………………………………… 6 分

(2)解:由(1)及 $BC=CD$ 可知,OC,OB,OP 两两垂直,

以点 O 为坐标原点,建立空间直角坐标系如图所示,



则 $O(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$D(-2,0,0)$,$C(0,2,0)$,$P(0,0,1)$,

$\therefore \overrightarrow{DC}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}=(4,4,0)$,

则 $A(-2,-4,0)$,

又 $\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{BP}=(-2,0,1)$,

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-2x+2y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-2x+z=0,\end{cases}$

令 $x=1$,则 $y=1$,$z=2$,

故 $\boldsymbol{m}=(1,1,2)$,

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,

$\overrightarrow{DP}=(2,0,1)$,$\overrightarrow{AD}=(0,4,0)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=2a+c=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=4b=0,\end{cases}$

令 $a=1$,则 $b=0$,$c=-2$,

故 $\boldsymbol{n}=(1,0,-2)$,

$\therefore |\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|-3|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$,

故平面 PAD 与平面 PBC 所成二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$. ……………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)当 $a=\mathrm{e}$ 时,函数 $f(x)=\log_a x-x=\ln x-x$,

故 $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,

当 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)<0$,故 $y=f(x)$在$(1,+\infty)$单调递减,

当 $x\in(0,1)$时,$f'(x)>0$,故 $y=f(x)$在$(0,1)$单调递增,

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=-1$,

又因为 $f(\mathrm{e})=1-\mathrm{e}, f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-1-\frac{1}{\mathrm{e}}$,

所以 $f(x)_{\min}=f(\mathrm{e})=1-\mathrm{e}$. …………………………………………………………………………………… 6 分

(2)因为函数 $f(x)$ 有两个零点,故 $f(x)=\log_a x-x=\frac{\ln x}{\ln a}-x=0$ 有两解,

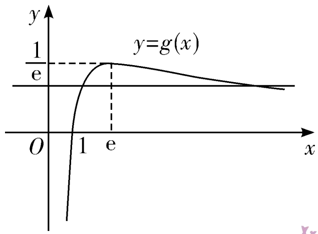
所以方程 $\frac{\ln x}{x}=\ln a$ 有两个不同的解,即为函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的图象与函数 $y=\ln a$ 的图象有两个不同的交点,

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$,故 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时,$g'(x)<0$,故 $y=g(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 单调递减,

当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时,$g'(x)>0$,故 $y=g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 单调递增,

图象如图所示,



而 $g(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$,所以 $0<\ln a<\frac{1}{\mathrm{e}}$,所以 $1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$,令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}-\ln a$,

因为 $h(1)=-\ln a<0, h(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}-\ln a>0$,

所以 $h(x)=\frac{\ln x}{x}-\ln a$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上有一个零点,

又当 $x\to+\infty$ 时,$g(x)\to 0, h(x)\to-\ln a<0, h(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}-\ln a>0$,

所以 $h(x)=\frac{\ln x}{x}-\ln a$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上有一个零点,

所以函数 $h(x)$ 有两个零点,即当 $1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时,函数 $f(x)$ 有两个零点. …………………………………… 12 分

22.**【解析】**(1)由题意,设椭圆方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<3)$.

设 $P(x_0,y_0)$,则

$\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\Rightarrow x_0^2-9=-\frac{9}{b^2}y_0^2$,

$k_{PD}k_{PE}=\frac{y_0}{x_0-3}\cdot\frac{y_0}{x_0+3}=\frac{y_0^2}{x_0^2-9}=\frac{y_0^2}{-\frac{9}{b^2}y_0^2}=-\frac{b^2}{9}=-\frac{1}{3}\Rightarrow b^2=3$,

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………………………………………………………… 5 分

(2)**解法 1**:①当直线 AB 的斜率存在时,设直线 AB:$y=kx+m$,

与椭圆方程联立得,$(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-9=0$,

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $M\left(\frac{x_1+3}{2},\frac{y_1}{2}\right),N\left(\frac{x_2+3}{2},\frac{y_2}{2}\right)$,

$\because x_1+x_2=\frac{-6km}{3k^2+1}, x_1x_2=\frac{3m^2-9}{3k^2+1}$, …………………………………………………………………… 7 分

$\Delta=12(9k^2-m^2+3)$,

$\because OM\perp ON,\therefore k_{OM}k_{ON}=\frac{\frac{y_1}{2}\cdot\frac{y_2}{2}}{\frac{x_1+3}{2}\cdot\frac{x_2+3}{2}}=\frac{y_1y_2}{(x_1+3)(x_2+3)}=-1$,

即 $(k^2+1)\cdot\frac{3m^2-9}{3k^2+1}+(km+3)\cdot\frac{-6km}{3k^2+1}+m^2+9=0$, ………………………………………………… 8 分

即 $9k^2-9km+2m^2=0$,

$\therefore(3k-2m)(3k-m)=0$,

$\therefore m=3k$ 或 $m=\dfrac{3}{2}k$, ………………………………………………………………………… 10 分

当 $m=3k$ 时，直线 AB 过左顶点$(-3,0)$，不合题意，舍去；

当 $m=\dfrac{3}{2}k$ 时，满足 $\Delta=12(9k^2-m^2+3)=81k^2+36>0$，

此时直线 AB 经过定点$\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$. ………………………………………………………………… 11 分

②当直线 AB 斜率不存在时，设 $A(m,n)$，$B(m,-n)$，则 $M\left(\dfrac{m+3}{2},\dfrac{n}{2}\right)$，$N\left(\dfrac{m+3}{2},-\dfrac{n}{2}\right)$，

由 $OM\perp ON$ 得$\dfrac{(m+3)^2}{4}-\dfrac{n^2}{4}=0$，$\therefore n^2=(m+3)^2$，

解方程组$\begin{cases}n^2=(m+3)^2,\\ \dfrac{m^2}{9}+\dfrac{n^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $m=-\dfrac{3}{2}$，此时直线 AB 过$\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$，

综合①②可知，直线 AB 过$\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$. ……………………………………………………………… 12 分

解法 2：设 $A(x_1,y_1)$，$D(x_0,y_0)$，$B(x_2,y_2)$，

则$\dfrac{x_1^2}{9}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$，$\dfrac{x_0^2}{9}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，$\therefore\dfrac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=-\dfrac{1}{3}$，即 $k_{DA}\cdot k_{OM}=-\dfrac{1}{3}$，

同理，$k_{DB}\cdot k_{ON}=-\dfrac{1}{3}$，又 $k_{OM}k_{ON}=-1$，得 $k_{DA}\cdot k_{DB}=-\dfrac{1}{9}$，

直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB：$y=kx+m$，代入椭圆方程，

得$(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-9=0$，

$x_1+x_2=\dfrac{-6km}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{3m^2-9}{3k^2+1}$，$\Delta=12(9k^2-m^2+3)$，

$\because\dfrac{y_1}{x_1-3}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-3}=-\dfrac{1}{9}$，$\therefore\dfrac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{(x_1-3)(x_2-3)}=-\dfrac{1}{9}$，

$\therefore(9k^2+1)x_1x_2+(9km-3)(x_1+x_2)+9m^2+9=0$.

$\therefore m=3k$ 或 $m=\dfrac{3}{2}k$. ………………………………………………………………………… 10 分

下同解法 1.