# 永州市2024年高考第二次模拟考试

# 数 学

命题人：蒋志刚（永州四中）　　周海洋（双牌二中）
陶先国（蓝山二中）　　陈诗跃（永州一中）
审题人：胡元紧（永州市教科院）

注意事项：

1. 全卷满分150分，时量120分钟.
2. 全部答案在答题卡上完成，答在本试题卷上无效.
3. 考试结束后，只交答题卡.

## 一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1、设全集$U=\{-2,-1,0,1,2\}$，集合$A=\{-1,0,1\}$，$B=\{y\mid y=2x,x\in A\}$，则$A\cap C_U B=$

A．$\{-2,0,2\}$　　B．$\{-1,0,1\}$　　C．$\{-1,1\}$　　D．$\{0\}$

2．已知$z(1+2\mathrm{i})=1$，则$z$的虚部为

A．$-\frac{2}{5}$　　B．$-\frac{2}{5}\mathrm{i}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{2}{5}\mathrm{i}$

3．已知向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(2,1)$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为

A．$\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$　　B．$\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$　　C．$\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$　　D．$\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$

4．已知函数$f(x)=\sin(3x+\varphi)(0<\varphi<2\pi)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，则$\varphi=$

A．$\frac{\pi}{8}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\pi$

5．若正四棱锥的侧面三角形底角的正切值为2，则侧面与底面的夹角为

A．$30^\circ$　　B．$45^\circ$　　C．$60^\circ$　　D．$75^\circ$

6．已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为$F$，过点$F$且斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$的直线$l$交$C$于$A$，$B$两点，点$M$在$C$的准线上，$MF\perp AB$．若$\triangle MAB$的面积为32，则$p=$

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

7．在$\triangle ABC$中，若$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=1$，$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=2$，则$\triangle ABC$的面积的最大值为

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{3}$

8．已知函数$f(x)=\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+a|}(a>0)$，下列结论正确的是

A．$f(x)$的图象是中心对称图形

B．$f(x)$在区间$\left(-\frac{a}{2},0\right)$上单调递增

C．若方程$f(x)=b$有三个解，$f(b)=b$，则$a+b=142$

D．若方程$f(x)=2$有四个解，则$a\in(2,4)$

**二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.**

9. 下列结论正确的是

A. 已知样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的方差为 2，则数据 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_{10}-1$ 的方差为 4

B. 已知概率 $P(B|A)=\dfrac{1}{3}$，$P(AB)=\dfrac{1}{4}$，则 $P(A)=\dfrac{3}{4}$

C. 样本数据 6,8,8,8,7,9,10,8 的第 75 百分位数为 8.5

D. 已知 $\left(1-\sqrt{2}\right)^5=a+b\sqrt{2}$（$a,b$ 为有理数），则 $a=41$

10. 若圆锥侧面展开图是一个半径为 2 的半圆，则

A. 该圆锥的母线与底面所成的角为 30°

B. 该圆锥的体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

C. 该圆锥的内切球的体积为 $\dfrac{8\sqrt{3}}{27}\pi$

D. 该圆锥的外接球的表面积为 $\dfrac{16}{3}\pi$

11. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，且 $f'(1)=2$，则

A. $f(x)$ 为奇函数

B. $f(x)$ 在 $x=-2$ 处的切线斜率为 7

C. $f(3)=12$

D. 对 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

12. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知曲线 $C_1:4x^2+y^2=1$，$C_2:2x^2-y^2=1$，与圆 $x^2+y^2=1$ 相切的直线 $l$ 交 $C_2$ 于 $P$，$Q$ 两点，点 $M$，$N$ 分别是曲线 $C_1$ 与 $C_2$ 上的动点，且 $OM\perp ON$，则

A. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$

B. $|OP||OQ|$ 的最小值为 2

C. $|OM|^2+|ON|^2$ 的最小值为 $\dfrac{8}{3}$

D. $O$ 点到直线 $MN$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. 已知 $\theta$ 为第二象限角，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，则 $\tan\theta=$________.

14. 已知盒中有 3 个红球，2 个蓝球，若无放回地从盒中随机抽取两次球，每次抽取一个，则第二次抽到蓝球的概率为________.

15. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2(x>0)$ 有一个极值点为零点，则 $a=$________.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3=-\dfrac{1}{4}$，$a_n+a_{n+1}=\dfrac{1}{16}n^2\cos\dfrac{n\pi}{2}$，则 $a_{240}=$________.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（10分）已知数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，$S_n=2a_n-2\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\begin{cases}a_n, & \left(n=2k,k\in \mathbf{N}^*\right)\\ \log_2 a_n, & \left(n=2k-1,k\in \mathbf{N}^*\right)\end{cases}$，求数列$\{b_n\}$的前$2n+1$项的和.

18．（12分）记$\triangle ABC$三个内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，已知$B$为锐角，$a\sin A+b\sin B-c\sin C=2a\sin A\sin B$.

（1）求$\sin(A-C)$；

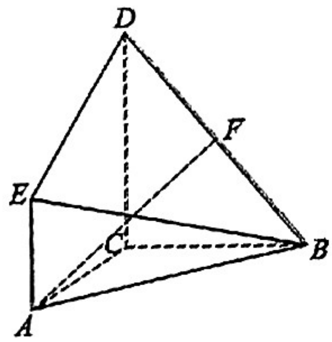
（2）求$\sin A\sin B$的最小值.



19．（12分）如图所示，在四棱锥$B-ACDE$中，$AE\parallel CD$，$AE\perp AC$，$CD=2AE=2$，平面$ACDE\perp$平面$ABC$，点$F$为$BD$的中点.

（1）证明：$AB\perp CD$；

（2）若$AC=BC=2$，$AF$与平面$ABE$所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{8}$，求四棱锥$B-ACDE$的体积.



20．（12分）在某网络平台组织的禁毒知识挑战赛中，挑战赛规则如下：每局回答3道题，若回答正确的次数不低于2次，该局得3分，否则得1分，每次回答的结果相互独立．已知甲、乙两人参加挑战赛，两人答对每道题的概率均为$\frac{1}{2}$．

（1）若甲参加了3局禁毒知识挑战赛，设甲得分为随机变量$X$，求$X$的分布列与期望；

（2）若甲参加了$2n\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$局禁毒知识挑战赛，乙参加了$2n+2\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$局禁毒知识挑战赛，记甲在禁毒知识挑战赛中获得的总分大于$4n$的概率为$p_1$，乙在禁毒知识挑战赛中获得的总分大于$4n+4$的概率为$p_2$，证明：$p_1<p_2$．

21．（12分）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$D$为线段$OF_2$的中点，过点$F_1$且斜率为$k_1(k_1\neq 0)$的直线$l$交$C$于$M$，$N$两点，$\triangle MF_1D$的面积最大值为$3\sqrt{3}$．

（1）求$C$的方程；

（2）设直线$MD$，$ND$分别交$C$于点$P$，$Q$，直线$PQ$的斜率为$k_2$，是否存在实数$\lambda$，使得$\lambda k_1+k_2=0$？若存在，求出$\lambda$的值；若不存在，请说明理由．

22．（12分）已知函数$f(x)=\sin x-\ln(1+ax)$．

（1）若$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)\geq 0$，求实数$a$的取值范围；

（2）设$n\in \mathbf{N}^*$，证明：$\sin\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{n+2}{n+1}<\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{k(k+2)}<\frac{3}{4}$．