2024年天津市八所重点学校高三毕业班联考

数学试卷

本试卷分第I卷(选择题) 和第II卷(非选择题) 两部分，共150分，考试时间120分钟.考试结束后，上交答题卡.

第I 卷(选择题, 共45分)

一. 选择题：本题共9小题，每小题5分，共45分. 在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的，请将正确答案的序号填涂到答题卡上.

1、已知全集$U=\{1,2,3,4,5\}$, 集合 $A=\{3,5\}, B=\{1,2,5\}$,则 $B\cap(C_{u}A)=($ $)$

$A.\{2\}$ $B.\{1,2\}$ $C.\{2,4\}$ $D.\{1,2,4\}$

2、若$xy\neq 0$,则 “$x^2=y^2$”是 “$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=-2$”的(　　)

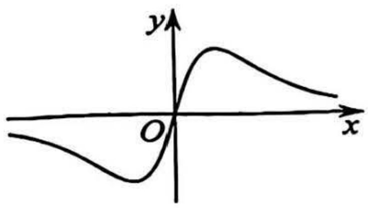
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　　D. 既不充分也不必要条件

3、已知 $a=\ln\frac{5}{2}, b=\log_{03}1.5, c=\left(\frac{2}{5}\right)^{-0s}$, 则(　)

A. b>c>a　　B. b>a>c　　C. c>a>b　　D. c>b>a

4、函数$f(x)$的部分图象如下图所示，则$f(x)$的解析式可能为(　)



$A.f(x)=\frac{\sin x}{e^x+e^{-x}}$　　　$D.f(x)=e^x+e^{-x}-\sin x-\frac{1}{4}$

$C.f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{\sin x}$　　　$D.f(x)=e^x+e^{-x}+\sin x-\frac{1}{4}$

5、已知某公路上经过的货车与客车的数量之比为3：1，货车和客车中途停车修理的概率分别为0.03和0.01，则t辆汽车中途停车修理的概率为(　　)

$A.1$　$B.\frac{1}{50}$　$C.\frac{1}{40}$　$D.\frac{1}{30}$

6、已知 $\vec{a}=(1|1), \vec{b}=(m|-1)$,m为实数，若 $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$,则向量$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为(　　)

$A.\left(\frac{1}{5}\middle|\frac{3}{5}\right)$　$B.\left(-\frac{1}{5}\middle|\frac{3}{5}\right)$　$C.\left(\frac{3}{5}\middle|\frac{1}{5}\right)$　$D.\left(\frac{3}{5}\middle|-\frac{1}{5}\right)$

7、清初著名数学家孔林宗曾提出一种“蒺藜形多面体”，其可由相同的两个正交的正四面体组合而成(如图1)，也可由正方体切割而成(如图2).在“蒺藜形多面体”中，若正四面体的棱长为2，则该几何体的体积为(　　)

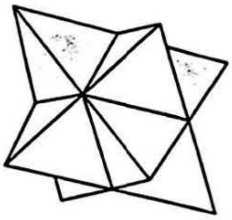


图1

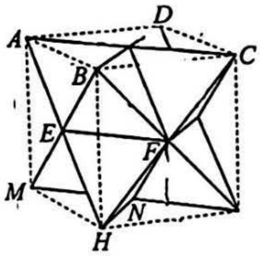


图2

$A.\sqrt{2}$　　B. 2　　$C.2\sqrt{2}$　　D. 4

8、 已知过原点 O 的直线l与双曲线 $Z:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$交于 A，B 两点(点 A 在第一象限), F_1,F_2分别为双曲线 E 的左、右焦点, 延长 AF_2交 E 于点 C,若 $|BF_2|=|AC|,\angle F_1BF_2=\frac{\pi}{3}$,则双曲线 E 的渐近线方程为(　)

$A.y=\pm\sqrt{2}x$　　$x=\pm\sqrt{2}y$　　$C.y=\pm\sqrt{3}x$　　$D.x=\pm\sqrt{3}y$

9、 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,A>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$的对称中心到对称轴的最小距离为$\frac{\pi}{4}$,将$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后所得图象关于 y 轴对称，且$|f(x_1)-f(x_2)|_{max}=1$,关于函数$f(x)$有下列四种说法：

① $x=\frac{\pi}{6}$是$f(x)$的一个对称轴；　②$\left(-\frac{\pi}{3}\middle|0\right)$是 $f(x)$的一个对称中心；

③$f(x)$在 $\left(0\middle|\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增；　④若 $f(x_1)=f(x_2)=0$,则 $x_1-x_2=\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$.

以上四个说法中，正确的个数为(　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

第II卷(非选择题, 共 105 分)

二. 填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分. 请将正确的答案填写到答题纸上.

10.若复数 z 满足 $z=\begin{cases}1+3i\\1-i\end{cases}$(其中$i$ 是虚数单位)，则 z 的虚部为____.

11. 在 $\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$的展开式中，$x^3$项的系数为_____.(用数字填写答案)

12. 已知直线$x-my+2=0$与⊙ $C:x^2+y^2=4$交于 A,B 两点, 写出满足“△ABC 面积为 $\sqrt{3}$”的实数 m 的 个值______ (写出其中 个即可)

13.学习于才干信仰，犹如运动于健康体魄，持之已久、行之愈远愈受益. 为实现中华民族伟大复兴，全国各行各业掀起了“学习强国”的高潮. 某老师很喜欢“学习强国”中“挑战答题”模块，他记录了自己连续七天每天一次最多答对的题数如下表：

天数x	1	2	3	4	5	6	7

一次最多答对题数 y	12	15	16	18	21	24	27

参考数据：$\overline{x}=4,\overline{y}=19,\sum_{i=1}^{7}x_i^2=140,\sum_{i=1}^{7}y_i^2=2695,\sum_{i=1}^{7}x_iy_i=600,\sqrt{6}\approx 2.45,$

相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2},\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i-\overline{y})}^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_{i-n\overline{x}\overline{y}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-nx^{-2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-ny^{-2}}}$

由表中数据可知该老师每天一次最多答对题数 y 与天数x之间是___相关(填“正”或“负”)，其相关系数 r≈_______(结果保留两位小数)

14.已知点 A 为抛物线 $y^2=2x$上一点(点 A 在第一象限)，点 F 为抛物线的焦点，准线为l，线段 AF 的中垂线交准线 l 于点 D，交 x 轴于点 E(D、E 在 AF 的两侧)，四边形 ADFE 为菱形，若点 P、 Q 分别在边 DA、EA 上，$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DA},\overrightarrow{EQ}=\mu\overrightarrow{EA}$,若 $2\lambda+\mu=\frac{5}{2}$, 则 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$的最小值为_____，$|t\overrightarrow{FA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{FE}|+|t\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FE}|(t\in R)$的最小值为_____.

15.函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(x+2),x>-2\\(x+2)^2+(a+3)(x+2)+3a,x\leq-2\end{cases}$,函数 $g(x)=a|x-2|$,若函数 $h(x)=f(x-2)-g(x+2)-2$恰有 2 个零点，则实数a的取值范围是_____.

三. 解答题：本大题共 5 小题，共 75 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16.(本小题满分 14 分)

在 $\triangle ABC$中, 内角 A,B,C 所对的边分别为a,b,c,已知$c-2b+2a\cos C=0$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $a=\sqrt{3},c=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

(i) 求$\sin(2C+A)$的值; (ii) 求 $\triangle ABC$的面积.

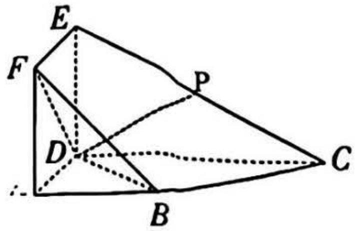
17.(本小题满分 15 分)

如图，正方形 ADEF 与梯形 ABCD 所在平面互相垂直，已知. $AB\|CD,AD\perp CD,AB=AD=\frac{1}{2}CD=1$.点 P 为线段 EC 的中点.

(1) 求证: BF // 平面 CDE;

(2) 求直线 DP 与平面 BDF 所成角的正弦值;

(3) 求平面 BDF 与平面 CDE 夹角的余弦值.



18.(本小题满分 15 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,$F_1$,$F_2$分别是椭圆 C 的左、右焦点，点 A 为左顶点，椭圆上的点到左焦点距离的最小值是焦距的 $\frac{1}{4}$.

(1) 求椭圆 C 的离心率;

(2)直线l过椭圆 C 的右焦点 F_2，与椭圆 C 交于 P，O 两点(点 P 在第一象限). 且 $\triangle APQ$面积的最大值为 $\frac{25}{3}$,

(i) 求椭圆 C 的方程;

(ii) 若直线 AP, AQ 分别与直线 $x=\frac{3}{4}$交于 M,N 两点,

求证：以 MN 为直径的圆恒过右焦点 F_2.

19.(本小题满分 15 分)

已知数列$\{a_n\}$是正项等比数列，$\{b_n\}$是等差数列，且 $a_1=2b_1=2,a_2=b_4,a_5=4a_3$,

(1) 求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2) $[x]$表示不超过x的最大整数，T_{4n}表示数列$\left\{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot b_n^2\right\}$的前$4n$项和， 集合 $A=\left\{n\middle|\lambda\le\frac{T_{4n}\cdot b_{n+2}}{a_{n+2}}\middle|n\in N^*\right\}$共有 4 个元素，求 λ 范围;

(3) $c_n=\begin{cases}\frac{4\sqrt{b_{a-1}}-\sqrt{b_n}}{a_{n+2}\sqrt{b_n}^2+2b_n}, n为奇数\\ a_n\cdot b_n，n为偶数\end{cases}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 2n 项和为 S_{2n},求证：$S_{2n}<\frac{25}{18}+\left(\frac{2n}{3}-\frac{2}{9}\right)4^{n+1}$.

20.(本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x)=e^x-xe^x-a\ln\frac{1}{x}$(e 是自然对数的底数).

(1) 当 $a=11$ 时, 求函数$f(x)$在点$(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2) 当 $a>e$时,

(i) 求证：函数$f(x)$存在唯一的极值点 x_1;