长郡中学2024届高三模拟考试（一）

数学

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知双曲线$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$，则该双曲线的渐近线方程为（　　）

A. $y=\pm x$　　B. $y=\pm 2x$

C. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　D. $y=\pm\sqrt{2}x$

2.为了了解学生们的身体状况，某学校决定采用分层抽样的方法，从高一、高二、高三三个年级共抽取100人进行各项指标测试.已知高三年级有500人，高二年级有700人，高一年级有800人，则高三年级抽取的人数为（　　）

A.30　　B.25　　C.20　　D.15

3.若$3\sin(\pi-\alpha)-4\cos\alpha=0$，则$1-\cos 2\alpha=$（　　）

A. $\frac{7}{25}$　　B. $\frac{18}{25}$　　C. $\frac{27}{25}$　　D. $\frac{32}{25}$

4.古印度数学家婆什迦罗在《莉拉沃蒂》一书中提出如下问题：某人给一个人布施，初日4德拉玛（古印度货币单位），其后日增5德拉玛.朋友啊，请马上告诉我，半个月中，他总共布施多少德拉玛？在这个问题中，这人15天的最后7天布施的德拉玛总数为（　　）

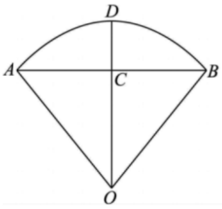
A.413　　B.427　　C.308　　D.133

5. $(x+1)^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中含$x^3$项的系数为（　　）

A.20　　B.-20　　C.30　　D.-30

6."会圆术"是我国古代计算圆弧长度的方法，它是我国古代科技史上的杰作，如图所示$\overset{\frown}{AB}$是以O为圆心，OA为半径的圆弧，C是AB的中点，D在$\overset{\frown}{AB}$上，$CD\perp AB$，则$\overset{\frown}{AB}$的弧长的近似值s的计算公式：

$s=AB+\dfrac{CD^2}{OA}$.利用上述公式解决如下问题：现有一自动伞在空中受人的体重影响，自然缓慢下降，伞面与人体恰好可以抽象成伞面的曲线在以人体为圆心的圆上的一段圆弧，若伞打开后绳长为 6 米，该圆弧所对的圆心角为60°，则伞的弧长大约为（　　）$\left(\sqrt{3}\approx 1.7\right)$



A.5.3 米　　B.6.3 米　　C.8.3 米　　D.11.3 米

7.函数 $f\left(x\right)=ax^3-ax^2+bx\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$ 有 3 个零点的充分不必要条件是（　　）

A.$a\neq 0$，且 $a>4b$　　B.$a>0$，且 $a<4b$

C.$a<0$，且 $a>4b,b\neq 0$　　D.$a<0$，且 $a<4b,b\neq 0$

8.已知实数 a,b 分别满足 $\mathrm{e}^a=1.02,\ln\left(b+1\right)=0.02$，且 $c=\dfrac{1}{51}$，则（　　）

A.$a<b<c$　　B.$b<a<c$

C.$b<c<a$　　D.$c<a<b$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.已知 i 为虚数单位，复数 $z=\dfrac{2}{\mathrm{i}\left(3+\mathrm{i}^3\right)}$，下列说法正确的是（　　）

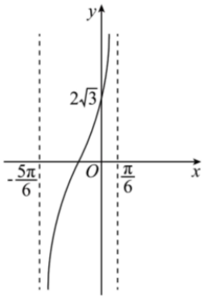
A.$\left|\overline{z}\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

B.复数 z 在复平面内对应的点位于第四象限

C.$\dfrac{3}{5}\mathrm{i}-\overline{z}<0$

D.$z+\dfrac{1}{5}$ 为纯虚数

10.已知函数 $f\left(x\right)=A\tan\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,0<\varphi<\pi\right)$ 的部分图象如图所示，则（　　）



A. $\omega \cdot \varphi \cdot A = \frac{\pi}{6}$

B. $f\left(x\right)$ 的图象过点 $\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

C.函数 $y = \left|f\left(x\right)\right|$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{3}$ 对称

D.若函数 $y = \left|f\left(x\right)\right| + \lambda f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ 上不单调，则实数 λ 的取值范围是 $\left[-1,1\right]$

11.小郡玩一种跳棋游戏，一个箱子中装有大小质地均相同的且标有 $1 \sim 10$ 的 10 个小球，每次随机抽取一个小球并放回，规定：若每次抽取号码小于或等于 5 的小球，则前进 1 步，若每次抽取号码大于 5 的小球，则前进 2 步.每次抽取小球互不影响，记小郡一共前进 n 步的概率为 p_n，则下列说法正确的是（　　）

A. $p_2 = \frac{1}{4}$

B. $p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{2} p_{n-2} \left(n \geq 3\right)$

C. $p_n = 1 - \frac{1}{2} p_{n-1} \left(n \geq 2\right)$

D.小华一共前进 3 步的概率最大

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.已知集合 $A = \left\{x \in \mathrm{N} \middle| \ y = \log_2\left(x-1\right)\right\}, B = \left\{-2,-1,1,2,3,4\right\}$，则 $A \cap B$ 的真子集的个数为__________.

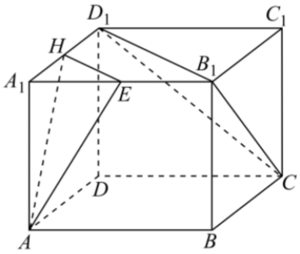
13.已知 O 为坐标原点，$F_1\left(-1,0\right), F_2\left(1,0\right), Q\left(0,3\right)$，向量 $\vec{m} = \left(1,-2\right)$，动点 P 满足 $\overrightarrow{PQ} \ // \ \vec{m}$，写出一个 a，使得有且只有一个点 P 同时满足 $\left|\left|PF_1\right| - \left|PF_2\right|\right| = 2a(0 < a < 1)$，则 $a =$__________.

14.如图是一个球形围墙灯，该灯的底座可以近似看作正四棱台.球形灯与底座刚好相切，切点为正四棱台上底面中心，且球形灯内切于底座四棱台的外接球.若正四棱台的上底面边长为 4，下底面边长为 2，侧棱长为 $\sqrt{3}$，则球形灯半径 r 与正四棱台外接球半径 R 的比值为__________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2,E,H$ 分别是棱 A_1B_1,A_1D_1 的中点，$AE\perp CD_1$.



（1）求正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积；

（2）求平面 AEH 与平面 CB_1D_1 所成锐二面角的余弦值.

16.（本小题满分 15 分）

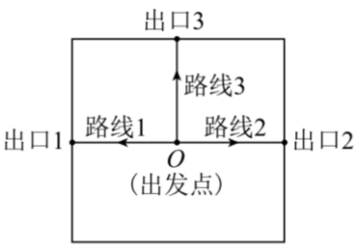
机器人一般是指自动控制机器（Robot）的俗称，自动控制机器包括一切模拟人类行为或思想与模拟其他生物的机械，用以取代或协助人类工作.机器人一般由执行机构、驱动装置检测装置、控制系统和复杂机械等组成.某大学机器人研究小组研发了 A 型、B 型两款火场救人的机器人，为检验其效能做下列试验：

如图，一正方形复杂房间有三个同样形状、大小的出口 $1{、}2{、}3$，其中只有一个是打开的，另外两个是关闭的，房间的中心 O 为机器人的出发点，A 型、B 型两个机器人别从出发点出发沿路线 $1{、}2{、}3$ 任选一条寻找打开的出口，找到后沿打开的出口离开房间；如果找到的出口是关闭的，则按原路线返回到出发点，继续重新寻找.

A 型机器人是没有记忆的，它在出发点选择各个出口是等可能的，

B 型机器人是有记忆的，它在出发点选择各个出口的尝试不多于一次，且每次选哪个出口是等可能的.

以 X 表示 A 型机器人为了离开房间尝试的次数，以 Y 表示 B 型机器人为了离开房间尝试的次数.



（1）试求离散型随机变量 Y 的分布列和期望；

（2）求 $X<Y$ 的概率.

17.（本小题满分 15 分）

对于数列 $\{a_n\}$，如果存在正整数 T，使得对任意 $n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，都有 $a_{n+T}=a_n$，那么数列 $\{a_n\}$ 就叫做周期数列，T 叫做这个数列的周期.若周期数列 $\{b_n\},\{c_n\}$ 满足：存在正整数 k，对每一个 $i\left(i\leqslant k,i\in\mathbf{N}^*\right)$，都有 $b_i=c_i$，我们称数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 为“同根数列”.

（1）判断数列 $a_n=\sin n\pi$、$b_n=\begin{cases}1,n=1\\3,n=2\\b_{n-1}-b_{n-2},n\geq 3\end{cases}$ 是否为周期数列.如果是，写出该数列的周期，如果不是，说明理由；

（2）若 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是“同根数列”，且周期的最小值分别是 $m+2$ 和 $m+4\left(m\in\mathbf{N}^*\right)$，求 k 的最大值.

18.（本小题满分 17 分）

已知抛物线 $C:y^2=2x$ 的焦点为 F，其准线 l 与 x 轴交于点 P，过点 P 的直线与 C 交于 A,B 两点（点 A 在点 B 的左侧）.

（1）若点 A 是线段 PB 的中点，求点 A 的坐标；

（2）若直线 AF 与 C 交于点 D，记 $\triangle BDP$ 内切的半径为 r，求 r 的取值范围.

19.（本小题满分 17 分）

黎曼猜想是解析数论里的一个重要猜想，它被很多数学家视为是最重要的数学猜想之一.它与函数 $f(x)=\dfrac{x^{s-1}}{e^x-1}(x>0,s>1,s$ 为常数）密切相关，请解决下列问题：

（1）当 $1<s\leqslant 2$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $s>2$ 时，

①证明：$f(x)$ 有唯一极值点；

②记 $f(x)$ 的唯一极值点为 $g(s)$，讨论 $g(s)$ 的单调性，并证明你的结论.