

2024年邵阳市高三第一次联考试题卷

数学（副卷）

本试卷共4页，22个小题。满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、班级、考号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡上“条形码粘贴区”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 保持答题卡的整洁。考试结束后，只交答题卡，试题卷自行保存。

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A = \{x | x = 4n, n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{3, 4, 8, 9\}$, 则集合 $A \cap B$ 的元素个数为

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2. 下列各式的运算结果不是纯虚数的是

- A. $(1+i)^2$ B. $(1-i)^2$ C. $\frac{1-i}{1+i}$ D. $(1+i)^4$

3. 命题 “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + 6 < 0$ ” 的否定为

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + 6 > 0$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + 6 \leq 0$
 C. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + 6 < 0$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + 6 \geq 0$

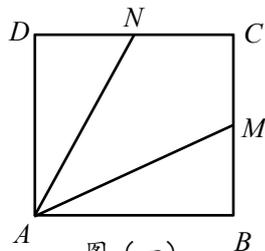
4. 若抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 上一点 $M(n, 6)$ 到焦点的距离是 $4p$, 则 p 的值为

- A. $\frac{12}{7}$ B. $\frac{7}{12}$ C. $\frac{6}{7}$ D. $\frac{7}{6}$

5. 如图（一）所示，四边形 $ABCD$ 是正方形， M, N 分别 BC, DC 的中点，若 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{AN}$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$,

则 $2\lambda - \mu$ 的值为

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{5}{2}$
 C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{10}{3}$



图（一）

6. 苗族四月八日“姑娘节”是流传于湖南省绥宁县的民俗活动，国家级非物质文化遗产之一。假设在即将举办的“姑娘节”活动中，组委会原排定有8个“歌舞”节目，现计划增加2个“对唱”节目.若保持原来8个节目的相对顺序不变，则不同的排法种数为
- A. 56 B. 90 C. 110 D. 132

7. 已知函数 $f(x) = 2\sin(3x + \frac{\pi}{6})$ 在 $[0, \frac{17}{72}a]$ 上单调递增，在 $[\frac{17}{9}a, \frac{10}{9}\pi]$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围为
- A. $[0, \frac{7}{17}\pi]$ B. $[\frac{6}{17}\pi, \frac{7}{17}\pi]$ C. $[\frac{7}{17}\pi, \frac{8}{17}\pi]$ D. $[\frac{8}{17}\pi, \frac{9}{17}\pi]$

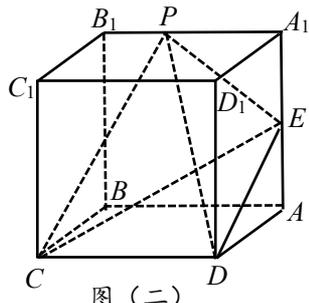
8. 设 $a = \sqrt[7]{\frac{e}{8}}$, $b = \sqrt[8]{\frac{e}{7}}$, $c = \frac{e}{56}$, 则 a, b, c 的大小关系为
- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

二、多选题（本大题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分）

9. 设点 $P(x, y)$ 为圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上一点，已知点 $A(4, 0)$, $B(5, 0)$, 则下列结论正确的有
- A. $x+y$ 的最大值为 $\sqrt{2}$ B. $x^2 + y^2 - 4x - 4y$ 的最小值为8
- C. 存在点 P 使 $|PB| = \sqrt{2}|PA|$ D. 过 A 点作圆 C 的切线，则切线长为 $\sqrt{15}$

10. 下列说法正确的有
- A. 将总体划分为2层，通过分层随机抽样，得到两层的样本平均数和样本方差分别为 \bar{x}_1 , \bar{x}_2 和 s_1^2 , s_2^2 , 且 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, 则总体方差 $s^2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2)$
- B. 在研究成对数据的相关关系时，相关关系越强，相关系数 $|r|$ 越接近于1
- C. 已知随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 若 $P(x \geq 1) + P(x \geq 5) = 1$, 则 $\mu = 3$
- D. 已知一组数据为50, 40, 39, 45, 32, 34, 42, 37, 则这组数据的第40百分位数为39

11. 如图（二）所示，已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 = 4$, $AB = 2$, E 为 AA_1 的中点，则
- A. $DE \parallel$ 平面 A_1CA
- B. $DE \perp$ 平面 D_1C_1E
- C. P 为棱 A_1B_1 上任一点，则三棱锥 $C - PDE$ 的体积为定值
- D. 平面 DCE 截此四棱柱的外接球得到的截面面积为 $\frac{\pi}{8}$



图（二）

12. 已知函数 $f(x)$ 与其导函数 $g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且 $f(x-1)$ 和 $g(2x+1)$ 都是奇函数, 且 $g(0) = \frac{1}{3}$, 则下列说法正确的有

- A. $g(x)$ 关于 $x=-1$ 对称
 B. $f(x)$ 关于 $(1, 0)$ 对称
 C. $g(x)$ 是周期函数
 D. $\sum_{i=1}^{12} ig(2i) = 4$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. $(\frac{2}{x} + x)(x-1)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 \blacktriangle .

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2, $a_n + a_{n+1} = 2n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_{10} = \blacktriangle$.

15. 已知 $\cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta = -\frac{1}{8}$, $\theta \in (\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{4})$, 则 $2\cos^2 4\theta - \cos \theta = \blacktriangle$.

16. 已知椭圆和双曲线有相同的焦点 F_1, F_2 , 它们的离心率分别为 e_1, e_2 , 点 P 为它们的一个交点, 且 $\cos \angle F_1PF_2 = -\frac{1}{2}$. 当 $e_1^2 + \frac{1}{12}e_2^2$ 取最小值时, e_1^2 的值为 \blacktriangle .

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分) 现有两台车床加工同一型号的零件. 第 1 台车床的正品率为 95%, 第 2 台车床的正品率为 93%, 将加工出来的零件混放在一起. 已知第 1, 2 台车床加工的零件数分别为总数的 60%, 40%.

- (1) 从混放的零件中任取 1 件, 如果该零件是次品, 求它是第 2 台车床加工出来的概率;
 (2) 从混放的零件中可放回抽取 10 次, 每次抽取 1 件, 且每次抽取均相互独立. 用 X 表示这 10 次抽取的零件是次品的总件数, 试估计 X 的数学期望 $E(X)$.

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A 满足 $\sqrt{3} \sin 2A - \cos 2A = 2$.

- (1) 求角 A 的大小;
 (2) 若 $\vec{DC} = 2\vec{BD}$, 求 $\frac{|\vec{AD}|}{|\vec{BD}|}$ 的最大值.

19. (12 分) 如图(三)所示, 圆台的上、下底面圆半径分别为 2cm 和 3cm, AA_1, BB_1 为圆台的两条不同的母线. O_1, O 分别为圆台的上、下底面圆的圆心, 且 $\triangle OAB$ 为等边三角形.

- (1) 求证: $A_1B_1 \parallel AB$;
 (2) 截面 ABB_1A_1 与下底面所成的夹角大小为 60° , 求异面直线 AA_1 与 B_1O_1 所成角的余弦值.

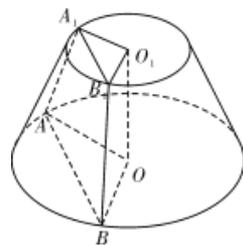


图 (三)

20. (12分) 设数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 满足: $a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n} = n^2$. 等比数列 $\{b_n\}$ 的首项 $b_1=1$, 公比为2.

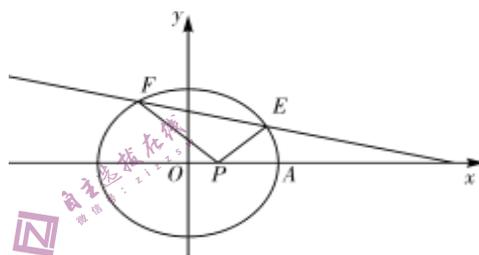
(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{\frac{a_n b_n}{n}\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $\sqrt{3}$, 右顶点到右焦点的距离为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 如图(四)所示, 设点 A 是椭圆 C 的右顶点. 过点 $(3, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于不同的两点 E, F , 且都在 x 轴的上方. 在 x 轴上是否存在点 P , 使 $\angle APE = \angle OPF$, 若存在, 请求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



图(四)

22. (12分) 已知函数 $f(x) = a \ln(x-1) + (a+2)x + 1$, $a \neq 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $F(x) = f(x) + 2 \sin(x-1) - 4x$, 求证: 当 $a=1$ 时, $F(x)$ 恰有两个零点.