金科大联考·2024届高三1月质量检测·数学

参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	C	D	A	B	A	D
题号	9	10	11	12				
答案	AD	AC	BCD	ABD				

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】C

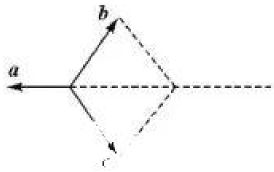
【解析】由 $x^2-5x\leqslant 0$，解得 $0\leqslant x\leqslant 5$，所以 $A=\{1,2,3,4,5\}$，由 $|x-1|<2$，解得 $-1<x<3$，所以 $B=\{0,1,2\}$，$A\cap B=\{1,2\}$，故选C.

2.【答案】B

【解析】由 $z=a-1+(a+1)\mathrm{i}$ 为纯虚数，得 $a-1=0$，解得 $a=1$，所以 $z=2\mathrm{i}$，$|z+1|=|1+2\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，故选B.

3.【答案】[illegible]

【解析】[illegible]，因为 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，所以 $\sin\alpha\neq 0$，故 $\frac{1}{1-\cos\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha}$，解得 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$，$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故选C.



4.【答案】D

【解析】如图所示，由平行四边形法则，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上[illegible] $\boldsymbol{a}$，故选D.

5.【答案】A

【解析】依题意，$f'(x)=a^x\ln a-\frac{a}{x}\geqslant 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，易知 $f''(x)=a^x(\ln a)^2+\frac{a}{x^2}>0$ 在 [illegible] 上恒成立，$f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以只需 $a\ln a-a=a(\ln a-1)\geqslant 0$，解得 $a\geqslant \mathrm{e}$，故选A.

6.【答案】B

【解析】不考虑甲是否去场馆 A，所有志愿者分配方案总数为 $\left(\mathrm{C}_5^3+\frac{\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{A}_2^2}\right)\mathrm{A}_3^3=150$，

甲去场馆 A,B,C 的概率相等，所以甲去场馆 B 或 C 的总数为 $150\times\frac{2}{3}=100$，

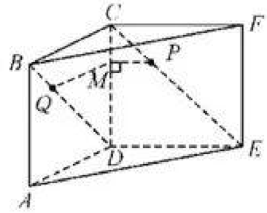
甲不去场馆 A，分两种情况讨论，

情形一，甲去场馆 B，场馆 B 有两名志愿者共有 $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1\mathrm{A}_2^2=24$ 种；

情形二，甲去场馆 C，场馆 B 场馆 C 均有两人共有 $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^2=12$ 种，场馆 B 场馆 A 均有两人共有 $\mathrm{C}_4^2=6$ 种，

所以甲不去场馆 A 时，场馆 B 仅有2名志愿者的概率为 $\frac{24+12+6}{100}=\frac{42}{100}=\frac{21}{50}$，故选B.

7.【答案】A



【解析】由于 $AF=2$，$EF=1$，则 $AE=\sqrt{3}$，在 $\triangle ADE$ 中，利用余弦定理求出 $\angle ADE=120^\circ$，过 P 作 CD 的垂线，垂足为 M，由 $PQ\perp CD$，可知 $CD\perp$ 平面 PMQ，

又 $QM\subset$ 平面 PMQ，所以 $QM\perp CD$，所以 $\angle PMQ=120^\circ$，

不妨设 $PM=x$，则 $QM=1-x$，所以由余弦定理得，

$PQ=\sqrt{x^2+x(1-x)+(1-x)^2}=\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选A.

8.【答案】D

【解析】设双曲线的焦距为 $2c$，左焦点为 F_1，离心率 $\frac{c}{a}=2$，则 $|F_1F|=2c=4a$，$|F_1C|=4a+2a=6a$，

由余弦定理得 $\cos\angle CFF_1=\frac{(4a)^2+(4a)^2-(6a)^2}{2\times4a\times4a}=-\frac{1}{8}$，所以 $\tan\angle CFF_1=-3\sqrt{7}$，

又 $A_2B /\!/ CF$，所以 $\tan\angle BA_2F=3\sqrt{7}$，设 $B(x_0,y_0)$，则 $\tan\angle BA_1F=\frac{y_0}{x_0+a}$，$\tan\angle BA_2F=\frac{y_0}{x_0-a}$，

所以 $\tan\angle BA_1F\times\tan\angle BA_2F=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\frac{b^2}{a^2}=e^2-1=3$，

所以 $\tan\angle BA_1F=\frac{1}{\sqrt{7}}$，$\tan\angle A_1BA_2=\tan(\angle BA_2F-\angle BA_1F)=\frac{3\sqrt{7}-\frac{1}{\sqrt{7}}}{1+3}=\frac{5\sqrt{7}}{7}$，故选 D.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.【答案】AD

【解析】甲组共有 5 个数据，从小到大排列后，10 为中间数字，所以甲组数据的中位数为 10，A 选项正确；
甲、乙两组数据的平均数均为 10，所以 $a=8.5\times0.75=3.75$，乙组数据从小到大排列为 8，8，9，10，15，所以乙组数据的第 75 百分位数为 10，B 选项错误；
甲组数据极差为 4，乙组数据极差为 7，C 选项错误；
两组数据平均数相同，乙组数据离散程度更大，方差更大，D 选项正确，故选 AD.

10.【答案】AC

【解析】设圆台外接球球心为 O，球心到上、下底面的距离为 h_1，h_2，则 $h_1^2+1^2=(\sqrt{5})^2$，解得 $h_1=2$，同理可得 $h_2=1$，
若 O 位于上下底面之间，则圆台的高为 $h_1+h_2=3$，
此时圆台体积为 $\frac{1}{3}\times3\times(\pi\times1^2+\pi\times2^2+\sqrt{\pi\times1^2\times\pi\times2^2})=7\pi$，
若 O 位于下底面下方，则圆台的高为 $h_1-h_2=1$，
此时圆台体积为 $\frac{1}{3}\times1\times(\pi\times1^2+\pi\times2^2+\sqrt{\pi\times1^2\times\pi\times2^2})=\frac{7\pi}{3}$，故选 AC.

11.【答案】BCD

【解析】$C_1(1,0)$，$C_2(5,3)$，$|C_1C_2|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$r_1=1$，$r_2=2$，因为 $|C_1C_2|>r_1+r_2$，所以 C_1 和 C_2 外离，A 选项错误；
直线 $y=1$ 与 C_1 和 C_2 均相切，所以直线 l 斜率的最小值为 0，B 选项正确；
直线 C_1C_2 的斜率 $k=\frac{3-0}{5-1}=\frac{3}{4}$，设直线 l 斜率最大时的倾斜角为 α，由 B 可知，直线 l 斜率的最小值为 0，则 $\tan\alpha=\frac{2k}{1-k^2}=\frac{24}{7}$，所以直线 l 斜率的最大值为 $\frac{24}{7}$. C 选项正确；
易知 $PC_1\leqslant5+2=7$，当 $PC_1\perp AB$ 时，$\triangle PAB$ 面积取得最大值为 $\frac{1}{2}|AB|\times7=7$，D 选项正确，故选 BCD.

12.【答案】ABD

【解析】依题意 $b\ln b=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-a}$，由于 $a>0$，所以 $0<\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-a}<\mathrm{e}$，所以 $0<b\ln b<\mathrm{e}$，解得 $1<b<\mathrm{e}$，A 选项正确；
要证 $2\mathrm{e}^a>\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-b}$，只需证 $b\ln b=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-a}>\mathrm{e}-(2\mathrm{e}-2b)=2b-\mathrm{e}$，即证 $\ln b>2-\frac{\mathrm{e}}{b}$，设 $f(x)=\ln x+\frac{\mathrm{e}}{x}-2(1<x<\mathrm{e})$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{\mathrm{e}}{x^2}=\frac{x-\mathrm{e}}{x^2}<0$，所以 $f(x)$ 单调递减，$f(x)>f(\mathrm{e})=0$，所以 B 选项正确；
要证 $b<a+1$，只需 $\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-a}<(a+1)\ln(a+1)$，即 $(a+1)\ln(a+1)+\mathrm{e}^{1-a}-\mathrm{e}>0$，设 $g(x)=(x+1)\ln(x+1)+\mathrm{e}^{1-x}-\mathrm{e}(x>0)$，则 $g'(x)=1+\ln(x+1)-\mathrm{e}^{1-x}$，因为 $\ln(x+1)$，$-\mathrm{e}^{1-x}$ 均单调递增，所以 $g'(x)$ 单调递增，$g'(0)=1-\mathrm{e}<0$，$g'(1)=\ln2>0$，所以存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $g'(x_0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，因为 $g(0)=0$，所以 $g(x_0)<0$，C 选项错误；

要证 $b<e^{a+1}$，只需 $e-e^{1-a}<(a+1)e^{a+1}$，即 $ae^{a+1}+e^{a+1}+e^{1-a}-e>0$，因为 $e^{a+1}+e^{1-a}>2\sqrt{e^{a+1}\times e^{1-a}}=2e$，所以 $ae^{a+1}+e^{a+1}+e^{1-a}-e>ae^{a+1}+e>0$，D 选项正确，故选 ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.【答案】2

【解析】依题意，$f(0)=1+b=0$，解得 $b=-1$，又 $f(1)-f(-1)=2f(1)=2$，所以 $f(1)=1$，故 $f(1)=a+b=a-1=1$，解得 $a=2$.

14.【答案】110

【解析】因为 $S_3=3a_2=18$，$a_2=6$，所以 $a_6=2a_4-a_2=10$，$S_{11}=11a_6=110$.

15.【答案】3

【解析】由题意知 $g(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{6}\right)$，$g(x)$ 图象关于原点对称，且 $g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{36},\frac{\pi}{18}\right)$ 上单调递减，因此 $\frac{\pi\omega}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解出 $\omega=12k+3$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $g(x)=-\sin\omega x$，于是 $y=\sin\omega x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{36},\frac{\pi}{18}\right)$ 上单调递增，

因此 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi\omega}{36},\\ \frac{\pi\omega}{18}\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解出 $0<\omega\leqslant 9$，又由于 $\omega=12k+3$，且 $k\in\mathbf{Z}$，则 $k=0$，$\omega=3$.

16.【答案】2π

【解析】易知 $|F_1F_2|=2$，设 $\angle F_1PF_2=\theta$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$，外接圆半径为 R，则 $\frac{2}{\sin\theta}=2R$，即 $R=\frac{1}{\sin\theta}$，

由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\theta=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot(1+\cos\theta)$，整理可得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{6}{1+\cos\theta}$，

所以 $\triangle F_1PF_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\theta=\frac{3\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}=3\tan\frac{\theta}{2}$，

故 $\triangle F_1PF_2$ 的内切圆半径 $r=\frac{2S}{|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|}=\tan\frac{\theta}{2}$，

所以 $S_1+2S_2=\pi(R^2+2r^2)=\pi\left(\frac{1}{\sin^2\theta}+2\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$，

因为 $\sin\theta=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$，

所以 $S_1+2S_2=\pi\left[\frac{\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)^2}{4\tan^2\frac{\theta}{2}}+2\tan^2\frac{\theta}{2}\right]=\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\tan^2\frac{\theta}{2}}+\frac{9}{4}\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\geqslant\pi\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{\frac{1}{4\tan^2\frac{\theta}{2}}\times\frac{9}{4}\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)=2\pi$，当且仅当 $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{3}$，即 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时取等号，所以 S_1+2S_2 的最小值为 2π.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.【答案】(1) -1　(2) $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$

【解析】(1) 由条件及正弦定理得 $\sin A=\sin B\sin C+\sin C\cos B$，………………………… 1 分

而 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B$，

因此 $\sin B\sin C=\sin B\cos C$，由于 $B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin B\neq 0$，$\cos C\neq 0$，得 $\tan C=1$，$C=\frac{\pi}{4}$，……… 3 分

因此是锐角三角形，因此 $\tan A$，$\tan B$ 均存在，

所以 $\tan C=-\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}=1$，………………………… 4 分

故 $\tan A+\tan B-\tan A\tan B=-1$； ………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知，$C=\frac{\pi}{4}$，则 $A+\frac{\pi}{2}=2B$，且 $A+B+\frac{\pi}{4}=\pi$，故 $B=\frac{5\pi}{12}$，$A=\frac{\pi}{3}$，…………………………… 6 分

利用正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，解出 $c=\frac{1}{\sqrt{2}\sin B}$，

$\sin B=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，故 $c=\sqrt{3}-1$， …………………………………………… 8 分

因此△ABC 面积 $=\frac{1}{2}\cdot bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}-1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$. …………………………………………… 10 分

18.【答案】(1)$P(Y=0)=\frac{5}{12}$，事件“$Y_1=6$”与事件“$Y=0$”不能同时发生，为互斥事件；(2)分布列见解析，$E(Y)=\frac{41}{36}$

【解析】(1)当 Y_2 取 6，Y_1 取值为 1，2，3，4，5 时，$Y=0$，

当 Y_2 取 5，Y_1 取值为 1，2，3，4 时，$Y=0$，

当 Y_2 取 4，Y_1 取值为 1，2，3 时，$Y=0$，

当 Y_2 取 3，Y_1 取值为 1，2 时，$Y=0$，

当 Y_2 取 2，Y_1 取值为 1 时，$Y=0$，

所以 $P(Y=0)=\frac{1+2+3+4+5}{6\times6}=\frac{5}{12}$，………………………………………………………… 3 分

当 [illegible]，事件“$Y_1=6$”与事件“$Y=0$”不能同时发生，为互斥事件；…………………… 5 分

(2)Y 的取值为 [illegible]，

(Y_1,Y_2) 取值为 [illegible]，(5，4)，(6，4)，(5，5)，(6，5)，(6，6)时，

$P(Y=1)=\frac{12}{6\times6}=\frac{1}{3}$.

(Y_1,Y_2)取值为(2，1)，(4，2)，(5，2)，(6，[illegible]

(Y_1,Y_2)取值为(3，1)，(6，2)时，$P(Y=3)=\frac{2}{6\times6}=\frac{1}{18}$，

(Y_1,Y_2)取值为(4，1)时，$P(Y=4)=\frac{1}{6\times6}=\frac{1}{36}$，

(Y_1,Y_2)取值为(5，1)时，$P(Y=5)=\frac{1}{6\times6}=\frac{1}{36}$，

(Y_1,Y_2)取值为(6，1)时，$P(Y=6)=\frac{1}{6\times6}=\frac{1}{36}$，……………………………………………………… 8 分

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

……… 10 分

所以 $E(Y)=0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{1}{18}+4\times\frac{1}{36}+5\times\frac{1}{36}+6\times\frac{1}{36}=\frac{41}{36}$. ……………………… 12 分

19.【答案】(1)$\lambda=\frac{1}{2}$　(2)$\frac{\sqrt{21}}{14}$

【解析】(1)连接 BD，AC，相交于 O，由 $AB/\!/CD$ 可知 $\frac{DO}{OB}=\frac{CD}{AB}=\frac{1}{2}$， …………………………………… 1 分

平面 $PBD\cap$平面 $EAC=EO$， ………………………………………………………………… 2 分

由 $PD/\!/$平面 AEC 可知，$PD/\!/EO$，则 $\frac{DO}{OB}=\frac{PE}{EB}=\lambda=\frac{1}{2}$；……………………………………… 3 分

(2)易知 $AC=\sqrt{2}$，$\angle CAB=45°$，又 $AB=2$，所以 $BC=\sqrt{2}$，

由于 $BC^2+AC^2=AB^2$，所以 $AC\perp BC$， ………………………………………… 4 分

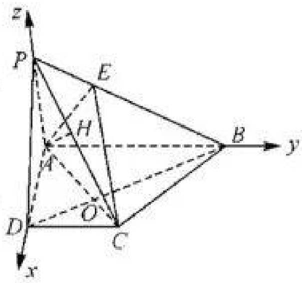
又 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BC$， ………………………… 5 分

因为 $PA\cap AC=A$，所以 $BC\perp$ 平面 PAC，所以平面 $PBC\perp$ 平面 PAC， ……………… 6 分

又平面 $PBC\cap$ 平面 $PAC=PC$，过 A 作 AH 垂直 PC 于 H，则 $AH\perp$ 平面 PBC，所以 $AH=1$，

设 $PA=a$，对 $\triangle PAC$ 使用等面积法可得 $\frac{a}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{a^2+2}}{2}\times 1$，解得 $a=\sqrt{2}$， ……………… 8 分

建立空间直角坐标系如图所示，$B(0,2,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$D(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，



由 $\frac{PE}{EB}=\frac{1}{2}$，可得 $E\left(0,\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$，$\overrightarrow{DE}=\left(-1,\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$， ………………… 9 分

因为 $AH\perp$ 平面 PBC，所以 $\overrightarrow{AH}$ 为平面 PBC 的一个法向量，

因为 $PA=AC$，所以 H 为 PC 的中点，所以 $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$， ……… 10 分

设直线 DE 与平面 PBC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AH}|}{|\overrightarrow{DE}|\cdot|\overrightarrow{AH}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{3}}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$， ……………………………………………… 11 分

所以直线 DE 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$． ……………………………………… 12 分

20.【答案】(1) [illegible] (2)略

【解析】(1)依题意 [illegible]， ……………………………………………… 1 分

所以 $\frac{S_1}{a_1}=2\frac{S_3}{a_3}$，数列 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 的公比为 [illegible]， ……………………………… 3 分

所以 $\frac{S_n}{a_n}=2^{n-1}$； ……………………………………………………………… 4 分

(2)证明：由(1)知，$S_n=2^{n-1}\cdot a_n$，当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=2^{n-2}\cdot a_{n-1}$， ……………………… 5 分

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}\cdot a_n-2^{n-2}\cdot a_{n-1}$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2^{n-2}}{2^{n-1}-1}$，$n\geqslant 2$， ……………… 7 分

则 $b_n=\frac{S_{n+1}}{a_n}=\frac{2^n\cdot a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\frac{(2^n)^2-1+1}{2^n-1}=\frac{1}{2}\left(2^n+1+\frac{1}{2^n-1}\right)>2^{n-1}+\frac{1}{2}$， ……………… 9 分

因此 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n>(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})+\frac{n}{2}=2^n+\frac{n}{2}-1$． ……………………… 12 分

21.【答案】(1) $y^2=2x$ (2)存在定点 $P\left(\frac{3}{4},0\right)$，使得 $|PH|$ 为定值 $\frac{3}{4}$ 来源：高三答案公众号

【解析】(1)设直线 AB：$x=my+\frac{p}{2}$，与抛物线方程联立可得 $y^2-2pmy-p^2=0$， ……………… 1 分

设 $A\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)$，则 $y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-p^2$， ………………………… 2 分

$|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{4p^2m^2+4p^2}=2p(1+m^2)\geqslant 2p=2$，

所以 Γ 的方程为 $y^2=2x$； …………………………………………………………… 4 分

(2)由(1)可知，$\frac{y_1+y_2}{2}=m$，$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{y_1^2+y_2^2}{4}=\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{4}=m^2+\frac{1}{2}$， ……………… 5 分

所以 $M\left(m^2+\frac{1}{2},m\right)$，同理可得 $N\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{2},-\frac{1}{m}\right)$， ……………………………… 7 分

直线 MN 斜率为 $\frac{m+\frac{1}{m}}{m^2-\frac{1}{m^2}}=\frac{m}{m^2-1}$， ……………………………………………… 8 分

所以直线 MN：$y=\frac{m}{m^2-1}\left(x-m^2-\frac{1}{2}\right)+m$，即 $y=\frac{m}{m^2-1}\left(x-\frac{3}{2}\right)$， ………………………… 9 分

所以直线 MN 过定点 $Q\left(\frac{3}{2},0\right)$， ………………………… 10 分

因为 $OH\perp MN$，所以 H 在以 OQ 为直径的圆上， ………………………… 11 分

所以存在定点 $P\left(\frac{3}{4},0\right)$，使得 $|PH|$ 为定值 $\frac{3}{4}$. ………………………… 12 分

22.【答案】(1)详解见解析　(2) $a\in(-\infty,1)$

【解析】(1)当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}-2(x-1)=\frac{2}{x}(\ln x-x^2+x)$， ………………………… 1 分

设 $g(x)=\ln x-x^2+x$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-(2x+1)(x-1)}{x}$， ………………………… 2 分

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，
当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取得极大值 $g(1)=0$，所以 $g(x)\leqslant g(1)=0$，
所以 $f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减； ………………………… 4 分

(2) $f'(x)=\frac{2\ln x}{x}-2a(x-1)=\frac{2}{x}(\ln x-ax^2+ax)$，

设 $h(x)=\ln x-ax^2+ax$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-2ax+a=\frac{-2ax^2+ax+1}{x}$， ………………………… 5 分

(ⅰ)当 $a<0$ 时，二次函数 $F(x)=-2ax^2+ax+1$ 开口向上，对称轴为 $x=\frac{1}{4}$，$\Delta=a^2+8a$，
当 $-8\leqslant a<0$ 时，$\Delta=a^2+8a\leqslant 0$，$F(x)\geqslant 0$，$h(x)$ 单调递增，
因为 $h(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，
所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点. ………………………… 6 分

当 $a<-8$ 时，$\Delta=a^2+8a>0$，又 $F\left(\frac{1}{4}\right)<0$，$F(1)=1-a>0$，

所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{4},1\right)$，使得 $F(x_0)=0$，所以当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$F(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

又 $h(1)=0$，所以当 $x\in(x_0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，
所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点； ………………………… 7 分

(ⅱ)当 $a=0$ 时，$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，
$f(x)$ 单调递增，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点； ………………………… 8 分

(ⅲ)当 $0<a<1$ 时，$F(x)=-2ax^2+ax+1$ 开口向下，对称轴为 $x=\frac{1}{4}$，$\Delta=a^2+8a>0$，

此时 $F(1)=1-a>0$，故 $\exists\, x_0\in(1,+\infty)$，使 $F(x_0)=0$，因此 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{4},x_0\right)$ 上单调递增，

又 $h(1)=0$，当 $x\in\left(\frac{1}{4},1\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点； ………………………… 9 分

(ⅳ)当 $a>1$ 时，$F(1)=1-a<0$，$\exists\, x_0\in\left(\frac{1}{4},1\right)$，使 $F(x_0)=0$，因此 $h(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

又 $h(1)=0$，当 $x\in(x_0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，
所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点； ………………………… 10 分

(ⅴ)当 $a=1$ 时，由(1)知 $x=1$ 非极小值点. ………………………… 11 分

综上所述，$a\in(-\infty,1)$. ………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线