高 2021 级高三期末考试数学试题（理科）参考答案

一、1－5CAADD　6－10BBDAB　11－12CB

二、 13、$\frac{4\sqrt{13}}{13}$　　14、$(-2,4]$　　15、4　　16、$3+2\sqrt{2}$

三、17、解：（I）设销售价格提高了 0.1x 万元/辆，年利润为 y 万元．则由题意得年销售量为 100-2x，

∴ $y=(10+0.1x-8)(100-2x)=-0.2x^2+6x+200=-0.2(x-15)^2+245$．

故当 x=15 时，y 取最大值．此时售价为 10+0.1×15=11.5 万元/辆．

∴ 当售价为 11.5 万元/辆时，年利润最大．……………………………………4 分

（II）由图表可知，利润为 2 万元的有 1 辆，2.5 万元的有 4 辆，3 万元的有 5 辆．

∴ $P(X=0)=\frac{C_4^2+C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$；$P(X=0.5)=\frac{C_4^1C_1^1+C_4^1C_5^1}{C_{10}^2}=\frac{24}{45}$；$P(X=1)=\frac{C_5^1C_1^1}{C_{10}^2}=\frac{5}{45}=\frac{1}{9}$．

∴ X 的分布列为：

X	0	0．5	1
P	$\frac{16}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{1}{9}$

∴ X 的数学期望 $E(X)=\frac{16}{45}\times 0+\frac{24}{45}\times 0.5+\frac{1}{9}\times 1=\frac{17}{45}$．

∴ X 的数学期望为 $\frac{17}{45}$．……………………………………12 分

18、（1）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $a_{n+1}=2S_n+2$ 得：$a_{n+2}=2S_{n+1}+2$，

所以 $a_{n+2}-a_{n+1}=2a_{n+1}$，即 $a_{n+2}=3a_{n+1}$，故 q＝3，

当 n＝1 时，$a_2=2S_1+2=2a_1+2=3a_1$，故 $\{a_n\}$ 为等比数列，

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2\cdot 3^{n-1}$；

由 $(n+2)b_n=nb_{n+1}$ 得：$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+2}{n}$，故 $\frac{b_2}{b_1}=\frac{3}{1}$，$\frac{b_3}{b_2}=\frac{4}{2}$，$\frac{b_4}{b_3}=\frac{5}{3}$，……，$\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}=\frac{n}{n-2}$，$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，

以上 n-1 个式子相乘得，$\frac{b_n}{b_1}=\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$，故 $b_n=n(n+1)$；

（2）由 $c_n=\frac{4\cdot 3^{n-1}}{n+1}$，结合（1）可得：$b_nc_n=4n\cdot 3^{n-1}$，

所以 $T_n=b_1c_1+\ldots+b_nc_n=4\times(1\times 3^0+2\times 3^1+\ldots+n\cdot 3^{n-1})$，$3T_n=4\times[1\times 3^1+2\times 3^2+\ldots+(n-1)\cdot 3^{n-1}+n\cdot 3^n]$，

两式相减得，$-2T_n=4\times(3^0+3^1+3^2+\ldots+3^{n-1}-n\cdot 3^n)=4(\frac{3^n-1}{2}-n\cdot 3^n)$，

所以 $-2T_n=4\times(3^0+3^1+3^2+\ldots+3^{n-1}-n\cdot 3^n)=4(\frac{3^n-1}{2}-n\cdot 3^n)$，故 $T_n=1+(2n-1)\cdot 3^n$．

19、（1）因为在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB=2AD=2CD=4$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，P 为 AB 的中点，所以，

$CD//PB$，$CD=PB$，所以△ADP 是正三角形，四边形 $DPBC$ 为菱形，可得 $AC\perp BC$，$AC\perp DP$，

而平面 $D'AC\perp$ 平面 BAC，平面 $D'AC\cap$ 平面 $BAC=AC$，$D'O\subset$ 平面 $D'AC$，$D'O\perp AC$，

$\therefore D'O\perp$ 平面 BAC，所以 OA，OP，OD' 两两互相垂直，

如图，以点 O 为坐标原点，OA，OP，OD' 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$B(-\sqrt{3},2,0)$，$D'(0,0,1)$，$P(0,1,0)$，

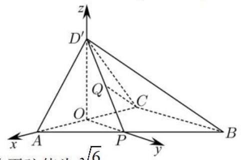
$\therefore \overrightarrow{AD'}=(-\sqrt{3},0,1)$，$\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{3},2,0)$，$\overrightarrow{BD'}=(\sqrt{3},-2,1)$，$\overrightarrow{CD'}=(\sqrt{3},0,1)$，

设平面 ABD' 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD'}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_1+z_1=0\\ -2\sqrt{3}x_1+2y_1=0\end{cases}$，令 $x_1=1$，则 $y_1=z_1=\sqrt{3}$，$\therefore \vec{m}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$，

设平面 CBD' 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD'}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD'}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}x_2-2y_2+z_2=0\\ \sqrt{3}x_2+z_2=0\end{cases}$，令 $x_2=1$，则 $y_2=0$，$z_2=-\sqrt{3}$，$\therefore \vec{n}=(1,0,-\sqrt{3})$，



$\therefore \cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1\times 1+\sqrt{3}\times 0+\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})}{\sqrt{1+3+3}\times\sqrt{1+3}}=-\frac{\sqrt{7}}{7}$，

所以二面角 $A-BD'-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{7}}{7}$．

（2）线段 PD' 上存在点 Q，使得 CQ 与平面 BCD' 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{8}$．

设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PD'}(0\le\lambda\le 1)$，因为 $\overrightarrow{CP}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{PD'}=(0,-1,1)$，所以

$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{CP}+\lambda\overrightarrow{PD'}=(\sqrt{3},1-\lambda,\lambda)$，

设 CQ 与平面 BCD' 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{CQ},\vec{n}\rangle\right|=\frac{|\overrightarrow{CQ}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{CQ}||\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{2\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+4}}=\frac{\sqrt{6}}{8}$，

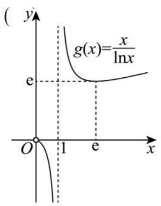
即 $3\lambda^2-7\lambda+2=0$，$\because 0\le\lambda\le 1$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$，

所以线段 PD' 上存在点 Q，且 $\frac{PQ}{PD'}=\frac{1}{3}$，使得 CQ 与平面 BCD' 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{8}$．

20、解：（1）当 $\lambda=0$ 时，显然不满足题意，

当 $\lambda\ne 0$ 时，若函数 $y=P(x)$ 只有一个零点，即 $x-\lambda\ln x=0$ 只有一个根，因为 1 不是方程的根，所以可转化为 $\lambda=\frac{x}{\ln x}$ 只有一个根，即直线 $y=\lambda$ 与函数 $g(x)=\frac{x}{\ln x}$（$x>0$ 且 $x\ne 1$）的图象只有一个交点.

$g'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，令 $g'(x)=0$，得 x＝e，在 $(0,1)$ 和 $(1,e)$ 上，$g'(x)<0$，在 $(e,+\infty)$ 上，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在和 $(1,e)$ 上单调递减，在 $(e,+\infty)$ 上单调递增.



在 x=e 时有极小值 $g(e)=e$，$g(x)$ 图象如图所示：

由图可知：若要使直线 $y=\lambda$ 与函数 $g(x)=\frac{x}{\ln x}$ 的图象只有一个交点，

则 $\lambda<0$ 或 $\lambda=e$，综上 λ 的取值所构成的集合为 $(-\infty,0)\cup\{e\}$.

（2）由题意知 $f(x)=e^{\lambda x}-\lambda\ln x$，$f'(x)=\frac{\lambda}{x}(xe^{\lambda x}-1)$,

令 $t(x)=xe^{\lambda x}-1(x\ge 0)$, 得 $t'(x)=(1+x)e^{\lambda x}>0$, 所 $t(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $t(0)=-1<0, t(1)=e^{\lambda}-1>0$. 由零点的存在性定理知存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $x_0e^{\lambda x_0}-1=0$,

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $h(\lambda)=f(x_0)=e^{\lambda x_0}-\lambda x_0$. 又 $x_0e^{\lambda x_0}-1=0$, 所以 $\lambda=-\dfrac{\ln x_0}{x_0}$，又 $\lambda\in(0,e)$，所以 $0<-\dfrac{\ln x_0}{x_0}<e$.

令 $r(x)=-\dfrac{\ln x}{x}\Rightarrow r'(x)=\dfrac{\ln x-1}{x^2}$, $r(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$r(1)=0, r(\dfrac{1}{e})=e$.

由 $0<-\dfrac{\ln x_0}{x_0}<e$ 得 $\dfrac{1}{e}<x_0<1$. 将 $\lambda=-\dfrac{\ln x_0}{x_0}$ 代入 $h(\lambda)=e^{\lambda x_0}-\lambda x_0$，

得 $h(\lambda)=\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{(\ln x_0)^2}{x_0}(\dfrac{1}{e}<x_0<1)$. 令 $M(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{(\ln x)^2}{x}(\dfrac{1}{e}<x<1)$，得 $M'(x)=-\dfrac{(\ln x-1)^2}{x^2}<0$，

所以 $M(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{(\ln x)^2}{x}(\dfrac{1}{e}<x<1)$ 在 $(\dfrac{1}{e},1)$ 单调递减，又 $M(\dfrac{1}{e})=2e, M(1)=1$.

所以 $h(\lambda)$ 的值域为 $(1,2e)$.

21、（1）依题意可得直线 AF_2 的方程为 $\dfrac{x}{c}+\dfrac{y}{b}=1$，即 $bx+cy-bc=0$，则 F_1 到直线 AF_2 的距离

$\dfrac{|-2bc|}{\sqrt{b^2+c^2}}=\dfrac{2bc}{a}=\sqrt{3}$. 又 $|AF_2|=\sqrt{b^2+c^2}=a=2$，$a^2=c^2+b^2$，故 $b=\sqrt{3}$，$c=1$，

所以椭圆 E 的标准方程为 $\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）①当直线 m 的斜率为 0 时，直线 m 的方程为 $y=0$，代入椭圆方程可得 $M(-2,0)$，$N(2,0)$.

直线 n 的方程为 $x=1$，代入圆的方程可得 $C(1,-\sqrt{3})$，$D(1,\sqrt{3})$，

所以 $|MN|=4$，$|CD|=2\sqrt{3}$，$|MN|+|CD|=4+2\sqrt{3}$；

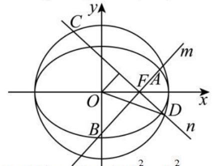
②当直线 m 的斜率不存在时，直线 m 的方程为 $x=1$，代入椭圆方程可得 $M\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$，$N\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

直线 n 的方程 $y=0$，代入圆的方程可得 $C(-2,0)$，$D(2,0)$，

所以 $|MN|=3$，$|CD|=4$，$|MN|+|CD|=7$；

③当直线 m 的斜率存在且不为 0 时，设 $m: y=k(x-1)$，则

$n: y=-\dfrac{1}{k}(x-1)$，点 O 到直线 n 的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$，圆的半径 $r=2$，



根据垂径定理可得，所以 $|CD|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{\dfrac{4k^2+3}{k^2+1}}$. 将 $y=k(x-1)$ 代入曲线 E 的方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，

整理得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，$\Delta=(-8k^2)^2-4(4k^2+3)(4k^2-12)=144(k^2+1)>0$ 恒成立.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由韦达定理可得，$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}$，

则 $|MN|=\sqrt{k^2+1}|x_1-x_2|=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{12(k^2+1)}{4k^2+3}$.

所以 $|MN|+|CD|=\dfrac{12(k^2+1)}{4k^2+3}+2\sqrt{\dfrac{4k^2+3}{k^2+1}}$. 因为 $k^2>0$，所以 $0<\dfrac{1}{k^2+1}<1$，所以 $3<4-\dfrac{1}{k^2+1}<4$.

令 $t=\sqrt{\dfrac{4k^2+3}{k^2+1}}=\sqrt{4-\dfrac{1}{k^2+1}}\in(\sqrt{3},2)$，则 $|MN|+|CD|=\dfrac{12}{t^2}+2t$，$t\in(\sqrt{3},2)$.

令 $f(t)=\dfrac{12}{t^2}+2t$，$t\in(\sqrt{3},2)$，则 $f'(t)=2-\dfrac{24}{t^3}=\dfrac{2(t^3-12)}{t^3}<0$ 在 $t\in(\sqrt{3},2)$ 上恒成立，

所以 $f(t)$ 在 $(\sqrt{3},2)$ 上单调递减. 又 $f(\sqrt{3})=4+2\sqrt{3}$，$f(2)=7$，所以 $f(t)\in(7,4+2\sqrt{3})$，

即 $|MN|+|CD|\in(7,4+2\sqrt{3})$. 综上所述，$|MN|+|CD|$ 的取值范围是 $[7,4+2\sqrt{3}]$.

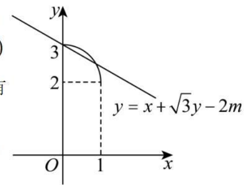
22、（1）因为 $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$x=\cos\alpha\in[0,1]$，$y=2+\sin\alpha\in[2,3]$，将曲线 C 的参数方程中的参数消去，并

结合 $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 可得曲线 C 的普通方程为：$x^2+(y-2)^2=1(0\le x\le 1, 2\le y\le 3)$.

直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\rho\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=m$，将 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$ 代入上式，得

直线 l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y-2m=0$.

（2）曲线 C 是以 $(0,2)$ 为圆心，1 为半径的四分之一圆弧，且圆弧两端点的坐标分别为 $(0,3)$ 和 $(1,2)$，作出曲线 C 与直线 l，如图所示，当直线 l 经过点 $(0,3)$ 时，直线 l 与曲线 C 有两个交点，此时 $m=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. 当直线 l 与曲线 C 相切时，有 $\dfrac{|0+2\sqrt{3}-2m|}{2}=1$，解得 $m=1+\sqrt{3}$ 或 $m=\sqrt{3}-1$（舍去）. 数形结合可知 m 的取值范围为 $\left[\dfrac{3\sqrt{3}}{2},1+\sqrt{3}\right)$.



23、解：（1）$f(x)\le 7$，即 $|x|+|x-2|\le 6$，利用零点分区间法，对 $f(x)$ 去绝对值，当 $x<0$ 时，由 $-2x+2\le 6$，得 $x\ge -2$，所以 $x\in[-2,0)$，当 $0\le x<2$ 时，$2\le 6$ 成立，所以 $x\in[0,2)$，当 $x\ge 2$ 时，由 $2x-2\le 6$，得 $x\le 4$，所以 $x\in[2,4]$. 综上可知，不等式 $f(x)\le 7$ 的解集为 $[-2,4]$.

（2）由题意，可知 $m>0$，由（1）得当 $x<0$ 时，$m\ge -2+\dfrac{1}{x}$ 恒成立，因为 $-2+\dfrac{1}{x}<0$，所以 $m>0$ 时不等式恒成立；

当 $x=0$ 时，$2\le 3$ 恒成立，所以 $m>0$ 时不等式成立；

当 $0<x<2$ 时，$m\le\dfrac{1}{x}$ 恒成立，而 $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{2}$，所以 $0<m\le\dfrac{1}{2}$ 时不等式恒成立；

当 $x\ge 2$ 时，即 $m\le 2-\dfrac{3}{x}$ 恒成立，而 $\dfrac{1}{2}\le 2-\dfrac{3}{x}<2$，所以 $0<m\le\dfrac{1}{2}$ 不等式恒成立.

综上，满足要求的 m 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。