2021～2022学年高三核心模拟卷(上)

文科数学(一)

注意事项：

1. 本卷满分150分，考试时间120分钟。答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $M=\{-1,0,1\}$，$N=\{-2,-1,0,2\}$，$T=\{2,3\}$，则 $(M\cup T)\cap N=$

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{-1,0,2\}$　　C. $\{0,2\}$　　D. $\{-1,2\}$

2. $\dfrac{(1+i)^2}{i}=$

A. 2　　B. -2　　C. $2i$　　D. $-2i$

3. 观察下列数的特点 $1,2,-1,3,-4,7,x,18,-29,\cdots$，其中 x 为

A. 12　　B. -12　　C. 11　　D. -11

4. 某同学做立定投篮训练，共3场，每场投篮次数和命中的次数如表中记录板所示。

	第一场	第二场	第三场
投篮次数	25	20	30
投中次数	16	13	18

根据图中的数据信息，该同学3场投篮的命中率约为

A. 0.616　　B. 0.627　　C. 0.635　　D. 0.648

5. 若点 $P(-2,-1)$ 为圆 $x^2+y^2=9$ 的弦 AB 的中点，则弦 AB 所在直线的方程为

A. $2x+y+5=0$　　B. $2x+y-5=0$　　C. $2x-y+5=0$　　D. $2x-y-5=0$

6. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$，则 $|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=$

A. $\sqrt{65}$　　B. $\sqrt{66}$　　C. $\sqrt{67}$　　D. $2\sqrt{17}$

7. 若双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线过点 $(2m,4m)(m\neq0)$，则双曲线 C 的离心率为

A. 4　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{3}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}4+\log_3 x, & x>0,\\ \dfrac{4}{3}-2^x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f[f(\log_{\frac{1}{4}}9)]=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geqslant 1, \\ x-y\geqslant -1, \\ 2x-y\leqslant 2, \end{cases}$ 则目标函数 $z=|x-2y+1|$ 的取值范围是

A. $[2,4]$　　B. $[1,4]$　　C. $[0,4]$　　D. $[0,2]$

10. 将函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $m(m>0)$ 个单位长度，再将图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到函数 $g(x)$ 的图象，若对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 均有 $g(x)\geqslant g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 成立，则 m 的最小值为

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \ln x, x>0, \\ 2x+1, x\leqslant 0, \end{cases}$ 若方程 $f(x)=ax$ 有三个不同的实数根 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，则 $x_1\cdot\frac{\ln(x_2x_3)}{x_2+x_3}$ 的取值范围是

A. $\left(\frac{e}{1-2e},-\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{1-2e},0\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2}-e,\frac{1-e}{2e-1}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2}-e,\frac{1}{e}-1\right)$

12. 点 F 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，l 为其准线，过 F 的一条直线与抛物线交于 A,B 两点，与 l 交于点 C. 已知点 B 在线段 CF 上，若 $|BF|,|AF|,|BC|$ 按照某种排序可以组成一个等差数列，则 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的值为

A. $\frac{3}{2}$ 或 3　　B. 2 或 4　　C. $\frac{3}{2}$ 或 4　　D. 2 或 3

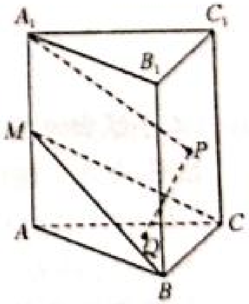
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 $\cos(2\theta+\pi)=\frac{1}{4}$，则 $\cos\theta=$________.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，若 $a_5=4(a_4-a_3)$，$a_1=1$，则 $a_2=$________.

15. 当 $x>-1$ 时，函数 $f(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+5}$ 的最大值为________.

16. 如图，在棱长均为 2 的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 M 是侧棱 AA_1 的中点，点 P,Q 分别是侧面 BCC_1B_1 和底面 ABC 内的动点，且 A_1P // 平面 BCM，$PQ\perp$ 平面 BCM，则点 Q 的轨迹的长度为________.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$AC=2\sqrt{2}$，$\tan C=\frac{\sqrt{7}}{7}$，$D$ 为 BC 边上一点，且 $CD=\sqrt{7}-2$.

(1)求 AD；

(2)若 $AB=\sqrt{2}$，求角 B 的大小.

18.（本小题满分 12 分）

由于生活方式的改变，颈椎病不再是老年人的专属，越来越多的年轻人患上了颈椎病. 现在的通讯设备发达，常常可以看到一群人在走路时、在吃饭时、在乘车时低着头玩手机，长期下来，就很容易使颈椎损伤，患上颈椎病. 手机和颈椎病可以说是形影不离.

某研究型学习小组调查研究“长期使用智能手机对颈椎病的影响”，对 100 名手机党调查得到部分统计数据如下表，规定：日使用手机时间超过 4 小时为频繁使用手机，已知频繁使用手机的人数比非频繁使用手机的人数少 24 人.

	非频繁使用手机	频繁使用手机	合计
颈椎病人数	8	a	
非颈椎病人数	b	16	
合计			100

(1)求表中 a,b 的值，并补全表中所缺数据；

(2)运用独立性检验思想，判断是否有 99.9%的把握认为频繁使用手机对颈椎病有影响？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

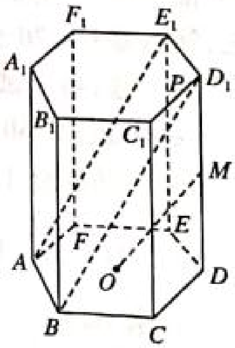
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

19.（本小题满分 12 分）

如图，在正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$，M 为侧棱 DD_1 的中点，P 为棱 C_1D_1 上一点，O 为下底面 $ABCDEF$ 的中心. 微信搜《高三答案公众号》

(1)求证：$MO//$平面 ABD_1E_1；

(2)求四棱锥 $P-A_1F_1DC$ 的体积.



20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(1,0)$，点 $P\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 在 C 上，c 为椭圆 C 的半焦距.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若经过 F 的直线 l 与 C 交于 A,B(异于 P)两点，与直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 交于点 M，设 PA,PB,PM 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3，求证：$k_1+k_2=2k_3$.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=ae^x-4x(a\in\mathbf{R})$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)当 $a=1$ 时，求证：$f(x)+x^2+1>0$.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)选修 4－4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t,\\ y=1+t\end{cases}$ (t 为参数). 以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\sin\theta+3=0$.

(1)求直线 l 的普通方程和圆 C 的直角坐标方程；

(2)设直线 l 与圆 C 交于 A,B 两点，P 为圆 C 上不同于 A、B 的动点，若满足△PAB 面积为 S 的点 P 恰有两个，求 S 的取值范围.

23.(本小题满分 10 分)选修 4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=(x+1)(|x|+|x+2|)$.

(1)求不等式 $f(x)>4$ 的解集；

(2)当 $x\geqslant-1$ 时，$f(x)\geqslant mx$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

2021～2022 学年高三核心模拟卷(上)

文科数学(一)参考答案

1. B　因为 $M\cup T=\{-1,0,1,2,3\}$，所以 $(M\cup T)\cap N=\{-1,0,2\}$. 故选 B.

2. A　$\frac{(1+i)^2}{i}=\frac{2i}{i}=2$. 故选 A.

3. D　观察下列数的特点 $1,2,-1,3,-4,7,x,18,-29,\cdots$，可知：$1-2=-1,2-(-1)=3,-1-3=-4,3-(-4)=7$，得 $x=-4-7=-11$. 故选 D.

4. B　该同学 3 场投篮的命中率为 $\frac{16+13+18}{25+20+30}\approx0.627$. 故选 B.

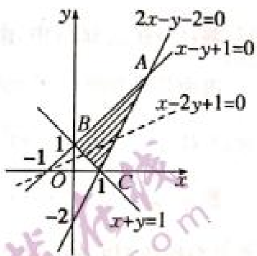
5. A　由题意，知圆心 $O(0,0)$ 且 $OP\perp AB$，而 $k_{OP}=\frac{1}{2}$，所以 $k_{AB}=-2$，又直线 AB 过 $P(-2,-1)$，则 AB 所在直线的方程为 $y+1=-2(x+2)$，整理得 $2x+y+5=0$. 故选 A.

6. C　因为 $|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+9\boldsymbol{b}^2+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2^2+9\times3^2+6\times(-3)=67$，所以 $|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=\sqrt{67}$. 故选 C.

7. C　由已知得双曲线 C 的一条渐近线的斜率为 $\frac{4m}{2m}=2$，则 $\frac{b}{a}=2$，所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=4$，即 $\frac{c^2}{a^2}-1=4$，所以 $e^2=5$，解得 $e=\sqrt{5}$. 故选 C.

8. D　$f[f(\log_{\frac{1}{4}}9)]=f\left(\frac{4}{3}-2^{\log_{\frac{1}{4}}9}\right)=f\left(\frac{4}{3}-2^{-\log_2 3}\right)=f\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)=f(1)=4+\log_3 1=4$. 故选 D.

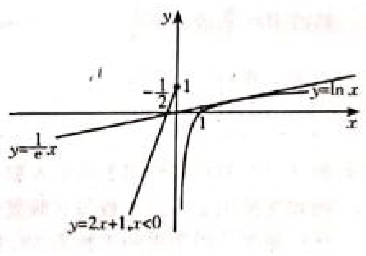
9. C　作出约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant1,\\x-y\geqslant-1,\\2x-y\leqslant2\end{cases}$ 表示的可行域如图所示，$z=|x-2y+1|=\sqrt{5}\cdot\frac{|x-2y+1|}{\sqrt{5}}$，



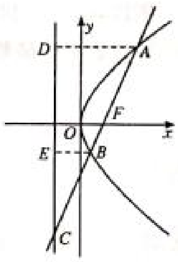
其几何意义为可行域内的点到直线 $x-2y+1=0$ 的距离的 $\sqrt{5}$ 倍. 由 $\begin{cases}x-y=-1,\\2x-y=2\end{cases}$ 解得 $A(3,4)$. 由图可知，z 的最大值为点 $A(3,4)$ 到直线 $x-2y+1=0$ 的距离的 $\sqrt{5}$ 倍，即为 4；因为直线 $x-2y+1=0$ 与可行域有公共点，所以 z 的最小值为 0. 故选 C.

10. A　将函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $m(m>0)$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(2x-2m+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，再将图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到函数 $g(x)$ 的图象，所以 $g(x)=\sin\left(x-2m+\frac{\pi}{3}\right)$. 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 均有 $g(x)\geqslant g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 成立，所以 $g(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 时取得最小值，所以有 $\frac{\pi}{6}-2m+\frac{\pi}{3}=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})\Rightarrow m=-k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 而 $m>0$，所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$. 故选 A.

11. B　当 $y=ax$ 与 $y=\ln x$ 相切时，设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，$a=\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$\therefore x_0=e$，$a=\frac{1}{e}$. 因为方程 $f(x)=ax$ 有三个不同的实数根 x_1,x_2,x_3，所以 $0<a<\frac{1}{e}$，由 $ax_1=2x_1+1$ 解得 $\frac{e}{1-2e}<x_1<-\frac{1}{2}$，所以 $x_1\cdot\frac{\ln(x_2x_3)}{x_2+x_3}=x_1\cdot\frac{\ln x_2+\ln x_3}{x_2+x_3}=x_1\cdot\frac{ax_2+ax_3}{x_2+x_3}=ax_1=2x_1+1\in\left(\frac{1}{1-2e},0\right)$. 故选 B.



12. D　$\because B$ 在线段 CF 上，$\therefore|BC|>|BF|,|AF|>|BF|$. ①当 $|BF|<|AF|<|BC|$ 时，作 $BE\perp l$ 于 E，$AD\perp l$ 于 D，$\because|BF|,|AF|,|BC|$ 成等差数列，$\therefore$ 不妨设 $|BF|=x-d,|AF|=x,|BC|=x+d$，由抛物线的定义知，$|BE|=|BF|=x-d,|AD|=|AF|=x$，$\because BE/\!/AD$，$\therefore\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{|BE|}{|AD|}$，即 $\frac{x+d}{3x}=\frac{x-d}{x}$，$\therefore x=2d$，$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{x}{x-d}=2$. ②当 $|BF|<|BC|<|AF|$ 时，同理可设 $|BF|=x-d,|BC|=x$，

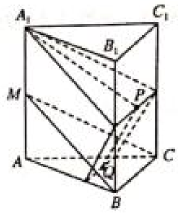


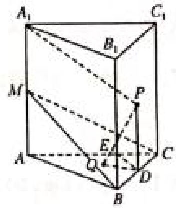
$|AF|=x+d$,由抛物线的定义知,$|BE|=|BF|=x-d$,$|AD|=|AF|=x+d$,$\because BE\parallel AD$,$\therefore \frac{|BC|}{|AC|}=\frac{|BE|}{|AD|}$,即$\frac{x}{3x}=\frac{x-d}{x+d}$,化简可得$x=2d$,$\therefore \frac{|AF|}{|BF|}=\frac{x+d}{x-d}=\frac{3d}{2d-d}=3$.综上,$\frac{|AF|}{|BF|}$所有可能值为2或3.故选D.

13. $\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$ 因为$\cos(2\theta+\pi)=-\cos 2\theta=\frac{1}{4}$,所以$\cos 2\theta=-\frac{1}{4}$,所以$2\cos^2\theta-1=-\frac{1}{4}$,解得$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$.

14. 2 设$\{a_n\}$公比为q,由题意得$a_1q^4=4(a_1q^3-a_1q^2)$,因为$a_1\neq0,q\neq0$,可得$q^2-4q+4=0$,解得$q=2$,则$a_2=a_1q=2$.

15. $\frac{1}{2}$ 设$t=x+1(t>0)$,则$x=t-1$,$\frac{2x+2}{x^2+2x+5}=\frac{2t}{t^2+4}=\frac{2}{t+\frac{4}{t}}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}}=\frac{1}{2}$,当且仅当$t=2$即$x=1$时取等号,即函数$f(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+5}$的最大值为$\frac{1}{2}$.





16. $\frac{4}{3}$ 因为P是侧面BCC_1B_1内的动点,且$A_1P\parallel$平面BCM,所以点P的轨迹是过点A_1与平面MBC平行的平面与侧面BCC_1B_1的交线的一部分,即连接侧棱BB_1,CC_1中点的线段l.因为Q是底面ABC内的动点,$PQ\perp$面BCM,所以Q的轨迹是过l与平面MBC垂直的平面与面ABC相交的线段m.过P作$PD\parallel BB_1$交BC于D,连接QD,设PQ交面BMC于E,连接ED,易知P,D,Q,E共面,且$BC\perp$面PDQ,即$\angle EDQ$为$M-BC-A$的平面角,如右图,所以$PD\perp QD$,而$AM=1$,A到BC的距离$d=\sqrt{3}$,可知$\angle EDQ=\frac{\pi}{6}$,故$\angle PDE=\frac{\pi}{3}$.因为$PD=1$,即$ED=PD\cdot\cos\angle PDE=\frac{1}{2}$,而$QD=\frac{ED}{\cos\angle EDQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以$\frac{QD}{d}=\frac{1}{3}$,即$Q$所在线段$m$过$\triangle ABC$的重心且与$BC$平行,由正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的棱长均为2,故线段$m$的长为$\frac{2}{3}\times2=\frac{4}{3}$.

17. 解:(1)在$\triangle ACD$中,由$\tan C=\frac{\sqrt{7}}{7}$得$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{4}$,$\cos C=\frac{\sqrt{14}}{4}$, ………… 2分

由余弦定理得$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos C$ ………… 4分

$=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{7}-2)^2-2\times2\sqrt{2}\times(\sqrt{7}-2)\times\frac{\sqrt{14}}{4}=5$,

所以$AD=\sqrt{5}$. ………… 6分

(2)在$\triangle ABC$中,$AB=\sqrt{2}$,$AC=2\sqrt{2}$,$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

由正弦定理得$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$,即$\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$, ………… 8分

所以$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ………… 10分

解得$B=\frac{\pi}{4}$或$B=\frac{3\pi}{4}$. ………… 11分

当$B=\frac{\pi}{4}$时,求得$BC=\sqrt{7}+1$,当$B=\frac{3\pi}{4}$时,求得$BC=\sqrt{7}-1$,均满足$BC>CD$,符合题意,所以$B=\frac{\pi}{4}$或$B=\frac{3\pi}{4}$.
………… 12分

18. 解:(1)因为频繁使用手机的人数比非频繁使用手机的人数少24人,
而频繁使用手机的人数与非频繁使用手机的人数之和为100,
所以频繁使用手机的人数为38,非频繁使用手机的人数为62, ………… 2分
所以$a=38-16=22$,$b=62-8=54$. ………… 4分
补全表中所缺数据如下:

	非频繁使用手机	频繁使用手机	合计
颈椎病人数	8	22	30
非颈椎病人数	54	16	70
合计	62	38	100

………… 6分

(2)根据题意计算观测值为 $K^2=\dfrac{100\times(8\times16-54\times22)^2}{30\times70\times62\times38}\approx22.710>10.828$， ………… 10分

所以有99.9%的把握认为频繁使用手机对颈椎病有影响. ………… 12分

19.(1)证明：连接 AD_1 和 AD.

因为 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，所以 O 为 AD 的中点. ………… 1分

又 M 为 DD_1 的中点，

所以 $OM/\!/AD_1$. ………… 2分

又 $AD_1\subset$ 平面 ABD_1E_1，$OM\not\subset$ 平面 ABD_1E_1，

所以 $MO/\!/$ 平面 ABD_1E_1. ………… 4分

(2)解：$V_{P-A_1F_1DC}=2V_{P-A_1CD}$，设 A_1 到平面 PCD 的距离为 d，

则 $V_{P-A_1CD}=V_{A_1-PCD}=\dfrac{1}{3}\times d\times S_{\triangle PCD}=\dfrac{d}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times4=\dfrac{4d}{3}$. ………… 6分

连接 AC，AD，则 $AD=2AB=4$，$AC=2\times2\sin60^\circ=2\sqrt{3}$， ………… 7分

所以 $AD^2=AC^2+CD^2$，故 $AC\perp CD$. ………… 8分

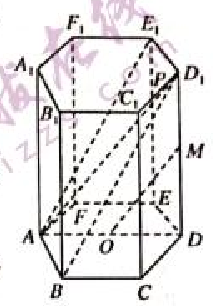
又平面 $ABCDEF\perp$ 平面 CDD_1C_1，平面 $ABCDEF\cap$ 平面 $CDD_1C_1=CD$，$AC\subset$ 平面 $ABCDEF$，

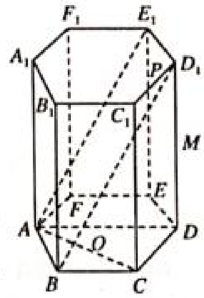
所以 $AC\perp$ 平面 PCD， ………… 9分

因为 $AA_1/\!/$ 平面 PCD，

所以 $d=AC=2\sqrt{3}$， ………… 10分

所以 $V_{P-A_1F_1DC}=2V_{P-A_1CD}=\dfrac{8d}{3}=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$. ………… 12分





20.(1)解：因为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(1,0)$，

所以 $c=1$.① ………… 1分

因为点 $P\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 在 C 上，所以 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2}=1$，② ………… 2分

又 $a^2=b^2+c^2$，③

由①②③，解得 $a=\sqrt{2}$，$b=1$. ………… 3分

故椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ………… 4分

(2)证明：$x=\dfrac{a^2}{c}=2$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 $AB:y=k(x-1)$，

则 $M(2,k)$. ………… 5分

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$， ………… 6分

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$， ………… 7分

所以 $k_1+k_2=\dfrac{y_1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{x_1-1}+\dfrac{y_2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{x_2-1}=\dfrac{k(x_1-1)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{x_1-1}+\dfrac{k(x_2-1)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{x_2-1}=2k-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}\right)=2k-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

$\dfrac{x_1+x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=2k-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\dfrac{4k^2}{1+2k^2}-2}{\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}-\dfrac{4k^2}{1+2k^2}+1}=2k-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{-2}{-1}=2k-\sqrt{2}$， ………… 10分

又因为 $k_3=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-k}{1-2}=k-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ………… 11分

所以 $k_1+k_2=2\left(k-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2k_3$，命题得证. ………… 12分

21. (1)解：$f'(x)=ae^x-4$，……………… 1分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；……………… 2分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)<0$，可得 $x<\ln\frac{4}{a}$，令 $f'(x)>0$，可得 $x>\ln\frac{4}{a}$，

所以 $f(x)$在$\left(-\infty,\ln\frac{4}{a}\right)$上单调递减，在$\left(\ln\frac{4}{a},+\infty\right)$上单调递增. ……………… 3分

综上所述：当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$的递减区间为$(-\infty,+\infty)$；当 $a>0$ 时，$f(x)$的递增区间为$\left(\ln\frac{4}{a},+\infty\right)$，递减区间为$\left(-\infty,\ln\frac{4}{a}\right)$. ……………… 4分

(2)证明：当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-4x$，令 $g(x)=f(x)+x^2+1=e^x-4x+x^2+1$，则 $g'(x)=e^x-4+2x$. ……………… 5分

令 $h(x)=e^x-4+2x$，因为 $h'(x)=e^x+2>0$ 恒成立，所以 $g'(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，……………… 6分

又 $g'(0)=-3<0$，$g'(1)=e-2>0$，

由零点存在性定理可得存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $g'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}-4+2x_0=0$. ……………… 8分

当 $x\in(-\infty,x_0)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，微信搜《高三答案公众号》

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-4x_0+x_0^2+1=4-2x_0-4x_0+x_0^2+1=x_0^2-6x_0+5=(x_0-1)(x_0-5)$. ……………… 11分

因为 $x_0\in(0,1)$，所以$(x_0-1)(x_0-5)>0$ 即 $g(x_0)>0$.

所以 $g(x)>0$，即 $f(x)+x^2+1>0$，得证. ……………… 12分

22. 解：(1)由$\begin{cases}x=t,\\y=1+t\end{cases}$($t$ 为参数)得 $y=1+x$，

故直线 l 的普通方程为 $x-y+1=0$；……………… 2分

由 $\rho^2-4\rho\sin\theta+3=0$ 及公式$\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\\rho\sin\theta=y,\end{cases}$得 $x^2+y^2-4y+3=0$，

即圆 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4y+3=0$. ……………… 4分

(2)圆 C 化为标准方程是 $x^2+(y-2)^2=1$，圆心为 $C(0,2)$，半径 $r=1$. ……………… 5分

因为圆心 $C(0,2)$到直线 l：$x-y+1=0$ 的距离 $d=\frac{|0-2+1|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，……………… 6分

$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$，……………… 7分

因为满足$\triangle PAB$ 面积为 S 的点 P 恰有两个，

所以$\frac{1}{2}|AB|\cdot(r-d)<S<\frac{1}{2}|AB|\cdot(r+d)$，……………… 9分

解得 S 的取值范围为$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2},\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$. ……………… 10分

23. 解：(1)$f(x)>4$ 即为$(x+1)(|x|+|x+2|)>4$，……………… 1分

①当 $x\leqslant -2$ 时，得$(x+1)(-x-x-2)>4$，即 $x^2+2x+3<0$，此不等式无解；……………… 2分

②当$-2<x<0$ 时，得$(x+1)(-x+x+2)>4$，解得 $x>1$，舍去；……………… 3分

③当 $x\geqslant 0$ 时，得$(x+1)(x+x+2)>4$，解得 $x<-\sqrt{2}-1$(舍去)或 $x>\sqrt{2}-1$. ……………… 4分

故不等式 $f(x)>4$ 的解集为$(\sqrt{2}-1,+\infty)$. ……………… 5分

(2)当 $x>0$ 时，则 $f(x)=(x+1)(x+x+2)=2(x+1)^2\geqslant mx$，

所以 $m\leqslant\frac{2(x+1)^2}{x}=2\left(x+\frac{1}{x}+2\right)$. ……………… 6分

由基本不等式可得 $2\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\geqslant 2\left(2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+2\right)=8$，……………… 7分

当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，所以 $m\leqslant 8$.

当 $x=0$ 时，$m\in\mathbf{R}$. ……………… 8分

当$-1\leqslant x<0$ 时，$f(x)=2(x+1)\geqslant mx$，即 $m\geqslant 2+\frac{2}{x}$.

因为 $x=-1$ 时，$2+\frac{2}{x}$有最大值 0，所以 $m\geqslant 0$. ……………… 9分

因此实数 m 的取值范围是$[0,8]$. ……………… 10分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承‘’专业、专注、有态度‘’的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。