数学试题参考答案与评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	A	B	A	B	C	C	D	D	BCD	AC	BCD	ABD

13. $\frac{3}{5}$

【解析】$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{3}{5}$

14. 750

【解析】$a_2=\frac{1}{1-a_1}=751,a_3=\frac{1}{1-a_2}=-\frac{1}{750},a_4=\frac{1}{1-a_3}=\frac{750}{751}$

所以$\{a_n\}$周期为3，且$a_1a_2a_3=-1,T_{2024}=(-1)^{674}\cdot a_1\cdot a_2=750$

15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】法一：因为F_2为PF_1中点，MF_1 // NF_2，所以N也是PM中点.

则$N\left(\frac{3c}{2},\frac{b}{2}\right)$，代入椭圆方程可得离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

法二：因为F_2为PF_1中点，MF_1 // NF_2，所以$NF_2=\frac{1}{2}MF_1=\frac{a}{2},x_N=\frac{3c}{2}$

用焦半径公式$a-e\cdot\frac{3}{2}c=\frac{a}{2}$，解得$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

16. 4

【解析】设$O(0,0),\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(2,0)$，向量$\vec{a},\vec{b}$夹角为$\theta$，则$\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(2\cos\theta,2\sin\theta)$

设$\vec{c}=(x,y)$，由$(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=-1$得：

$(x-2,y-0)\cdot(x-2\cos\theta,y-2\sin\theta)=-1$化简得：

$\left[x-(1+\cos\theta)^2\right]+(y-\sin\theta)^2=1-2\cos\theta$，即$(x,y)$在一个圆上

而$\vec{a}\cdot\vec{c}=2x$，所以即求x的最大值，为$\vec{c}$在$\vec{a}$上投影长度最大时，即$1+\cos\theta+\sqrt{1-2\cos\theta}$

令$t=\sqrt{1-2\cos\theta}$，则$2x=2\left(1+\cos\theta+\sqrt{1-2\cos\theta}\right)=3-t^2+2t=-(t-1)^2+4\leq 4$

在$t=1$即$\theta=\frac{\pi}{2}$时取得

17.解：（1）在$\triangle ACD$中，由正弦定理得：$\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}\Rightarrow\sin\angle ADC=\frac{4\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\angle ADC=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$，

当$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$时，$\angle DAC=\frac{\pi}{2}$，与$\triangle ACD$为钝角三角形不符合，舍去.

所以$\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$.

（2）由（1）知，$\triangle ACD$为等腰三角形，

$$\angle DAC=\frac{\pi}{6},DC=4,\tan\angle BAC=\tan\left(\angle BAD-\angle DAC\right)=\frac{\tan\angle BAD-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\angle BAD\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$\because AC\perp BC,\therefore BC=AC\cdot\tan\angle BAC=3$，

由$S_{\triangle DCP}+S_{\triangle PCB}=S_{\triangle DCB}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot DC\cdot PC\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}PC\cdot CB=\frac{1}{2}DC\cdot CB\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)$，

可得$PC=\frac{6\sqrt{3}}{5},\therefore S_{\triangle PDC}=\frac{1}{2}DC\cdot PC\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{6\sqrt{3}}{5}$

法二：作$DH\perp AC$于H，则$DH=DC\sin\frac{\pi}{6}=2$，

由$\triangle PDH\backsim\triangle PBC$得$\frac{DP}{PB}=\frac{DH}{BC}=\frac{2}{3}$，

则$S_{\triangle DCP}=\frac{2}{5}S_{\triangle DCB}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}CD\cdot CB\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

18.解：（1）若选条件①，则令$m=1$，可得：$S_{n+1}-S_n=2n+1$，

故当$n\geq 2$时有：$S_n=S_1+\left(S_2-S_1\right)+\left(S_3-S_2\right)+\cdots+\left(S_n-S_{n-1}\right)=1+3+5+\cdots+\left(2n-1\right)=n^2\Rightarrow$

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$

又当$a_1=1$也符合上式，所以$a_n=2n-1$

若选条件②，则由$\left(a_n+1\right)^2=4S_n$可得当$n\geq 2$时有：$\left(a_{n-1}+1\right)^2=4S_{n-1}$，两式相减得；

$\left(a_n+a_{n+1}\right)\left(a_n-a_{n-1}-2\right)=0$，因为$a_n>0$，故有$a_n-a_{n-1}-2=0$

又由题可求得$a_1=1$，所以$\left\{a_n\right\}$是首项为1，公差为2的等差数列，从而有$a_n=2n-1$

（2）由（1）可知：$a_n\cdot 2^{a_n}=\left(2n-1\right)2^{2n-1}$，则

$T_n=1\times 2^1+3\times 2^3+5\times 2^5+\cdots+(2n-1)2^{2n-1}$

$4T_n=1\times 2^3+3\times 2^5+5\times 2^7+\cdots+(2n-1)2^{2n+1}$

两式相减得：$-3T_n=1\times 2^1+2\times\left(2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1}\right)-(2n-1)2^{2n+1}$

$=2+2\times\dfrac{8\left(1-4^{n-1}\right)}{1-4}-(2n-1)2^{2n+1}=-\dfrac{10}{3}+\left(\dfrac{5}{3}-2n\right)2^{2n+1}$

所以$T_n=\dfrac{10}{9}+\left(\dfrac{2n}{3}-\dfrac{5}{9}\right)\cdot 2^{2n+1}$

19.（1）计算得$\overline{x}=5.5,\overline{y}=34$，所以：

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\frac{1936-10\cdot 5.5\cdot 34}{385-10\cdot 5.5^2}=\frac{66}{82.5}=0.8,\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=34-0.8\cdot 5.5=29.6$$

则同归直线方程为$\hat{y}=0.8x+29.6$，代入$x=13$得$y=40$

所以预测 2024 年 1 月新能源渗透率为40%；

（2）由题意，每个客户购买新能源车的概率为$\dfrac{2}{5}$，燃油车概率为$\dfrac{3}{5}$

X所有可能取值为$0,2,4,6$

则$P(X=0)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{8}{125},P(X=2)=C_3^1\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\left(\dfrac{3}{5}\right)^1=\dfrac{36}{125}$，

$P(X=4)=C_3^2\left(\dfrac{2}{5}\right)^1\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{54}{125},P(X=6)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{27}{125}$

所以X的分布列为

X	0	2	4	6
P	$\dfrac{8}{125}$	$\dfrac{36}{125}$	$\dfrac{54}{125}$	$\dfrac{27}{125}$

所以$E(X)=2\cdot\dfrac{36}{125}+4\cdot\dfrac{54}{125}+6\cdot\dfrac{27}{125}=\dfrac{450}{125}=\dfrac{18}{5}$（万元）.

20.解：（1）证明：取AB中点O，连接A_1O,CO，由题知$\triangle A_1AB$为正三角形，而$\triangle ABC$也是正三角形，

$\therefore A_1O\perp AB,CO\perp AB$，又$\because A_1O\cap CO=O,\therefore AB\perp$平面$A_1CO$，

$\because A_1C\subset$平面$A_1CO,\therefore AB\perp A_1C$

（2）$\because A_1A=AB=AC=a,\cos\angle A_1AC=\frac{1}{4}$，

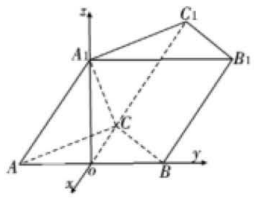
由余弦定理得 $A_1C^2=AA_1^2+AC^2-2AA_1\cdot AC\cdot\cos\angle A_1AC=\frac{3}{2}a^2$

$\therefore A_1C=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，又 $A_1O=CO=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

$\therefore A_1O^2+CO^2=A_1C^2,\therefore A_1O\perp CO$

又 $\because A_1O\perp AB,AB\cap CO=O,\therefore A_1O\perp$ 平面 $ABC,\therefore A_1O$、CO、AB 两两垂直.

以 O 为原点，以 $\overrightarrow{CO},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系如图.



因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $V=S_{\triangle ABC}\cdot A_1O=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=24\Rightarrow a=4$，

则 $A(0,-2,0),B(0,2,0),C\left(-2\sqrt{3},0,0\right),A_1\left(0,0,2\sqrt{3}\right),\overrightarrow{A_1C}=\left(-2\sqrt{3},0,-2\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AA_1}=\left(0,2,2\sqrt{3}\right),\overrightarrow{CB}=\left(2\sqrt{3},2,0\right)$.设平面 CBB_1C_1 的法向最为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0\\ n\cdot CB'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y+2\sqrt{3}z=0\\ 2\sqrt{3}x+2y=0\end{cases}$，可取 $\vec{n}=\left(1,-\sqrt{3},1\right)$，设向量 $\vec{n}$ 与 $\overrightarrow{A_1C}$ 的夹角为 θ，

$\therefore\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=\left(1,-\sqrt{3},1\right)\cdot\left(-2\sqrt{3},0,-2\sqrt{3}\right)=-4\sqrt{3}=\sqrt{5}\cdot2\sqrt{6}\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$，

$\therefore$ 直线 A_1C 与平面 CBB_1C_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

21.解：（1）因为渐近线方程为 $y=x$，所以 $a=b$，设双曲线为 $x^2-y^2=a^2$，

代入 $P\left(\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$ 得 $a^2=4$，双曲线的标准力程为 $x^2-y^2=4$

（2）设直线 $AP:x=\frac{3}{t}y-2$，联立双曲线 $\begin{cases}x=\frac{3}{t}y-2\\ x^2-y^2=4\end{cases}$ 得：

$\frac{9}{t^2}y^2-\frac{12}{t}y+4-y^2=4,y_\varepsilon=\frac{12t}{9-t^2},x_c=\frac{3}{t}y_c-2=\frac{18+2t^2}{9-t^2}$；

设直线$BP:x=-\frac{1}{t}y+2$，联立双曲线$\begin{cases}x=-\frac{1}{t}y+2\\x^2-y^2=4\end{cases}$得：

$\frac{1}{t^2}y^2-\frac{4}{t}y+4-y^2=4,y_D=\frac{4t}{1-t^2},x_D=-\frac{1}{t}y_D+2=\frac{-2-2t^2}{1-t^2}$;

所以$k_{AD}=\frac{y_D}{x_D+2}=\frac{\frac{4t}{1-t^2}}{\frac{-4t^2}{1-t^2}}=-\frac{1}{t},k_{BC}=\frac{y_C}{x_C-2}=\frac{\frac{12t}{9-t^2}}{\frac{4t^2}{9-t^2}}=\frac{3}{t}$

则$AD:y=-\frac{1}{t}(x+2),BC:y=\frac{3}{t}(x-2)$

设$Q(x_0,y_0)$，则$\begin{cases}y_0=-\frac{1}{t}(x_0+2)\\y_0=\frac{3}{t}(x_0-2)\end{cases}$，两式相除消$t$得$\frac{x_0-2}{x_0+2}=-\frac{1}{3},x_0=1$

所以Q在直线$x=1$上

另证：

设直线$AD:y=\frac{y_D}{x_D+2}(x+2)=\frac{y_D}{x_D+2}\cdot\frac{x_D^2-4}{{y_D}^2}(x+2)=\frac{x_D-2}{y_D}(x+2)$，

直线$BC:y=\frac{y_C}{x_C-2}(x-2)=\frac{y_C}{x_C-2}\cdot\frac{x_C^2-4}{y_C^2}(x-2)=\frac{x_C+2}{y_C}(x-2)$，

由于$k_{BP}=k_{BD}$，即$\frac{y_D}{x_D-2}=-t$，

由于$k_{AP}=k_{AC}$，即$\frac{y_C}{x_C+2}=\frac{t}{3}$

则$AD:y=-\frac{1}{t}(x+2),BC:y=\frac{3}{t}(x-2)$.后同前证

22.解：（1）假设存在x_1,x_2满足题意，易知$f'(x)=6x^2-6$，由题可得：

$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 2{x_1}^3-6x_1=2{x_2}^3-6x_2\Rightarrow {x_1}^2+x_1x_2+{x_2}^2=3$

$f'(x_1)=f'(x_2)\Leftrightarrow 6x_1^2-6=6x_2^2-6\Rightarrow x_1+x_2=0\Rightarrow x_1=-x_2$代入上式可解得$(x_1,x_2)=(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

或$(\sqrt{3},-\sqrt{3})$，故$f(x)$为“切合函数”

（2）由题可知$g'(x)=\ln x-\frac{2x}{e}+a+1$，因为$g(x)$“切合函数”，故存在不同的$x_1,x_2$（不妨设$0<x_1<x_2$）

使得：$\begin{cases} g(x_1)=g(x_2) \\ g'(x_1)=g'(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1\ln x_1-\dfrac{x_1^2}{e}+ax_1=x_2\ln x_2-\dfrac{x_2^2}{e}+ax_2 \\ \ln x_1-\dfrac{2x_1}{e}+a+1=\ln x_2-\dfrac{2x_2}{e}+a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_2-x_1}+\dfrac{x_2+x_1}{e}\langle 1\rangle \\ \dfrac{e}{2}=\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}\langle 2\rangle \end{cases}$

①先证：$\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$，即证：$\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}-\sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}}>\ln x_2-\ln x_1=\ln\dfrac{x_2}{x_1}$

令$t=\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}$，则由$0<x_1<x_2$可知$t>1$，要证上式，只需证：

$t-\dfrac{1}{l}>\ln t^2=2\ln t \Leftrightarrow m(t)=2\ln t-t+\dfrac{1}{l}<0(t>1)$，易知$m'(t)=\dfrac{-(t-1)^2}{t^2}<0$

故$m(t)$在$(1,+\infty)$单调递减，所以$m(t)<m(1)=0$，故有$\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$成立

由上面的$\langle 2\rangle$式可得$\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{e}{2}\Rightarrow x_1x_2<\dfrac{e^2}{4}$

②由上面的$\langle 2\rangle$式可得：$\dfrac{1}{e}=\dfrac{1\ln x_2-\ln x_1}{2}x_2-x_1$，代入到$\langle 1\rangle$式中可得：

$a=\dfrac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_2-x_1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{(\ln x_2-\ln x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2-x_2\ln x_1+x_1\ln x_2}{2(x_2-x_1)}=\dfrac{x_1\ln x_1x_2-x_2\ln x_1x_2}{2(x_2-x_1)}=$

$-\dfrac{\ln x_1x_2}{2}\Rightarrow x_1x_2=e^{-2a}$ 且由（1）可得 $a>-\dfrac{\ln\dfrac{e^2}{4}}{2}=\ln\dfrac{2}{e}$

（另解：由上面的$\langle 2\rangle$式可得$\dfrac{x_2-x_1}{e}=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{2}$，代入到$\langle 1\rangle$式的变形：

$a(x_2-x_1)=x_1\ln x_1-x_2\ln x_2+\dfrac{x_2^2-x_1^2}{e}$，整理后也可得到$a=-\dfrac{\ln x_1x_2}{2}$）

故要证$(a+1)^2x_1x_2-\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{3}{4}$，只需证：

$(a+1)^2e^{-2a}-e^{-a}<\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\dfrac{3}{4}e^{2a}+e^a-(a+1)^2>0\left(a>\ln\dfrac{2}{e}\right)$

设$h(a)=\dfrac{3}{4}e^{2a}+e^a-(a+1)^2\left(a>\ln\dfrac{2}{e}\right)$，则即证：$h(a)>0$

$h'(a)=\dfrac{3}{2}e^{2a}+e^a-2(a+1),h''(a)=3e^{2a}+e^a-2=(3e^a-2)(e^a+1)$

$\because a>\ln\dfrac{2}{e}>\ln\dfrac{2}{3},\therefore e^a>\dfrac{2}{3}\Rightarrow 3e^a-2>0\Rightarrow h''(a)>0\Rightarrow h'(a)$在$\left(\ln\dfrac{2}{3},+\infty\right)$单调递增

$$h'(a)>h'\left(\ln\frac{2}{e}\right)>h'\left(\ln\frac{2}{3}\right)=2\left(\frac{2}{3}-\ln\frac{2}{3}-1\right)>0(\because x-\ln x-1\geqslant 0)$$

$$\Rightarrow h(a)\text{在}\left(\ln\frac{2}{3},+\infty\right)\text{单调递增}\Rightarrow h(a)>h\left(\ln\frac{2}{e}\right)>h\left(\ln\frac{2}{3}\right)=\left(\ln\frac{2}{3}\right)\left(-\ln\frac{2}{3}-2\right)>0$$

所以原不等式成立

另证：当 $a\in\left(\ln\frac{2}{e},0\right]$ 时，可用 $e^a\geqslant a+1$ 放缩代入证明不等式成立

当 $a\in(0,+\infty)$ 时，可用 $e^a\geqslant\frac{1}{2}a^2+a+1$ 放缩代入证明不等式成立

综上，原不等式成立