2024 年普通高中高三级教学质量测试
答案及评分标准(参考)　数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	C	A	A	D	B	D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

题号	9	10	11	12
答案	AD	ACD	BC	BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\sqrt{13}$　14. 4　15. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$　16. $8-\frac{\sqrt{2}}{2}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。

17. (10 分)

(1)解：设等差数列$\{a_n-n^2\}$的公差为 d，

因为 $a_2=9$，$a_3=16$，

所以 $d=(a_3-3^2)-(a_2-2^2)=2$，…… 2 分

所以 $a_n-n^2=a_2-2^2+(n-2)\times 2=2n+1$，…… 4 分

所以 $a_n=n^2+2n+1$. …… 5 分

(2)证明：因为 $\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{(n+2)n}$ …… 6 分

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，…… 7 分

所以 $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$ …… 8 分

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ …… 9 分

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)<\frac{3}{4}$. …… 10 分

18. (12 分)

(1)证明：在$\triangle ABC$中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos 60°=3$，…… 1 分

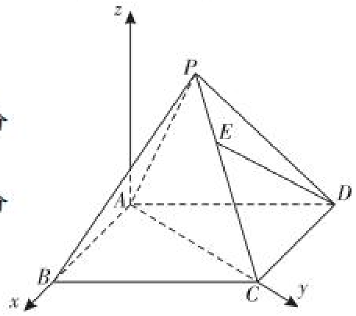
所以 $AB^2+AC^2=BC^2$，所以 $AB\perp AC$. …… 2 分

又 $AB\perp PC$，$AC\subset$平面 PAC，$PC\subset$平面 PAC，$AC\cap PC=C$，所以 $AB\perp$平面 PAC. …… 3 分

又 $AB\subset$平面 $ABCD$，所以平面 $PAC\perp$平面 $ABCD$. …… 4 分

(2)解：过点 A 在平面 PAC 内作垂直于 AC 的直线 AZ，由(1)可得 $AZ\perp$平面 $ABCD$，以点 A 为原点，AB，AC，AZ 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，…… 5 分

则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$D(-1,\sqrt{3},0)$，$P\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，…… 6 分



所以 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AP}=\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，

$\overrightarrow{PC}=\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{DP}=\left(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，……… 7 分

所以 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{DP}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PC}=\left(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$. ……… 8 分

设平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{3}{2}z=0,\end{cases}$ ……………………… 9 分

取 $y=-\sqrt{3}$，则 $x=0$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,-\sqrt{3},1)$ 是平面 PAB 的一个法向量…… 10 分

设直线 DE 与平面 PAB 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{DE},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{DE}|}\right|=\dfrac{\left|\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\times(-\sqrt{3})+1\times1\right|}{2\times\sqrt{1^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ………… 11 分

故直线 DE 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ……………………………… 12 分

19.（12 分）

解：(1) 该班同学的平均进球个数

$\bar{x}=8\times0.02\times4+12\times0.04\times4+16\times0.08\times4+20\times0.07\times4+24\times0.04\times4=17.12$. ……… 3 分

(2) 由题意可知进球个数在 $[10,14)$，$[14,18)$，$[22,26]$ 内的频率分别为 0.16，0.32，0.16，频率比为 $0.16:0.32:0.16=1:2:1$，

所以抽取的 8 人中，进球个数在 $[10,14)$，$[14,18)$，$[22,26]$ 内的人数分别为 2，4，2.
……………………………………………………………………………… 4 分

(i) 由题意可知，$X=0,1,2,3$，

所以 $P(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_8^3}=\dfrac{1}{14}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_4^2}{C_8^3}=\dfrac{3}{7}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_4^1}{C_8^3}=\dfrac{3}{7}$，$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_8^3}=\dfrac{1}{14}$，……………………………… 6 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{14}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{14}$

…………………………………… 7 分

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{14}+1\times\dfrac{3}{7}+2\times\dfrac{3}{7}+3\times\dfrac{1}{14}=\dfrac{3}{2}$. …………………………………… 8 分

(ⅱ)记事件 A =“抽取的 3 人的进球个数不全在同一区间”，事件 B =“抽取的这 3 人的进球个数在不同区间”，

则 $P(A)=\dfrac{C_8^3-C_4^3}{C_8^3}=\dfrac{13}{14}$，$P(AB)=\dfrac{C_2^1C_4^1C_2^1}{C_8^3}=\dfrac{2}{7}$， ………………………………………… 10 分

所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{13}{14}}=\dfrac{4}{13}$，

即这 3 个人的进球个数在不同区间的概率为$\dfrac{4}{13}$. ……………………………………… 12 分

20. (12 分)

解：(1)由题意得$\dfrac{S}{b^2}=\dfrac{\sin A\cos A\cos B}{\sin B}+\cos^2A$，即$\dfrac{S}{b^2}=\dfrac{\cos A(\sin A\cos B+\cos A\sin B)}{\sin B}$，

所以$\dfrac{S}{b^2}=\dfrac{\cos A\sin(A+B)}{\sin B}$，即$\dfrac{S}{b^2}=\dfrac{\cos A\sin C}{\sin B}$. ……………………………………………… 2 分

由正弦定理得$\dfrac{S}{b^2}=\dfrac{\cos A\cdot c}{b}$，即 $S=bc\cos A$， ……………………………………… 4 分

所以$\dfrac{1}{2}bc\sin A=bc\cos A$，即 $\sin A=2\cos A$，

所以 $\tan A=2$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)由已知及正弦定理得 $b=\dfrac{\sqrt{5}}{3}c$， ……………………………………………………… 6 分

由(1)得 $\sin A=2\cos A$，所以 $\sin^2A=4\cos^2A=1-\cos^2A$，

解得 $\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\cos A=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\text{舍去}\right)$. ……………………………………………… 7 分

又 D 为 BC 的中点，所以$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

所以 $|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2}$，

所以 $2\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}\sqrt{c^2+2bc\cos A+b^2}$，

所以 $c^2+2\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}c^2\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{5}{9}c^2=80$，解得 $c=6$，

所以 $b=2\sqrt{5}$. ……………………………………………………………………………… 10 分

在△ABC 中，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(2\sqrt{5})^2+6^2-2\times2\sqrt{5}\times6\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=32$，

解得 $a=4\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

21. (12 分)

解：(1)由题意得$\begin{cases}2b=2,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\ b=1,\end{cases}$ ……………………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………… 4 分

(2) $\alpha-\beta$ 存在最大值，当 $\alpha-\beta$ 取最大值时，

直线 AM 的方程为 $x+\sqrt{3}y+2=0$，BN 的方程为 $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$，理由如下：

由(1)可得 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，

由题意可知直线 l 的斜率不为 0，设直线 l 的方程为 $x=my+1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

所以 $\Delta=4m^2+12(m^2+4)=16m^2+48>0$，

$y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{3}{m^2+4}$， ………………………………………… 6 分

所以 $my_1y_2=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$. ………………………………………… 7 分

又 $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}}=\frac{(x_2-2)y_1}{(x_1+2)y_2}=\frac{(my_2-1)y_1}{(my_1+3)y_2}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}=\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}$

$=\frac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2}=\frac{1}{3}$， ………………………………………… 9 分

所以 $\tan\beta=3\tan\alpha$，可知 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\pi$.

若 $\alpha-\beta$ 取最大值，则 $\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\pi$，此时 $\tan\alpha<0$，$\tan\beta<0$.

此时 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\tan\alpha-3\tan\alpha}{1+3\tan^2\alpha}=\frac{-2\tan\alpha}{1+3\tan^2\alpha}=\frac{2}{\frac{-1}{\tan\alpha}+(-3\tan\alpha)}\leqslant$

$\frac{2}{2\sqrt{\frac{-1}{\tan\alpha}\times(-3\tan\alpha)}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

当且仅当 $\frac{-1}{\tan\alpha}=-3\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan\beta=-\sqrt{3}$ 时等号成立， …………… 11 分

此时直线 AM 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$，即 $x+\sqrt{3}y+2=0$，

直线直线 BN 的方程为 $y=-\sqrt{3}(x-2)$，即 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$. ……………………… 12 分

22. (12 分)

(1) 证明：当 $k=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)=e^{x-1}+(\ln x)^2-x$，所以 $f'(x)=e^{x-1}+\frac{2\ln x}{x}-1$， … 1 分

当 $x\in(0,1)$ 时，$e^{x-1}<1$，$\ln x<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减； ……………………… 2 分

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$e^{x-1}>1$，$\ln x>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，…………………… 3 分

所以 $f(x)\geqslant f(1)=0$，即不等式成立. …………………………………………………… 4 分

(2)解：由题意得对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $ke^x+(\ln x)^2-x\geqslant(x+\ln k)^2$，

即 $ke^x-(x+\ln k)^2\geqslant x-(\ln x)^2$，即 $e^{x+\ln k}-(x+\ln k)^2\geqslant e^{\ln x}-(\ln x)^2$. ………… 7 分

令 $g(u)=e^u-u^2$，可得 $g(x+\ln k)\geqslant g(\ln x)$ 恒成立，

$g'(u)=e^u-2u$，

令 $h(u)=e^u-2u$，所以 $h'(u)=e^u-2$. ………………………………………………… 8 分

当 $u\in(-\infty,\ln 2)$ 时，$h'(u)<0$，$h(u)$ 单调递减；

当 $u\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$h'(u)>0$，$h(u)$ 单调递增，

所以 $h(u)\geqslant h(\ln 2)=2(1-\ln 2)>0$，即 $g'(u)>0$，

所以 $g(u)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

所以 $x+\ln k\geqslant\ln x$ 恒成立，即 $\ln k\geqslant\ln x-x$ 恒成立，故只需 $\ln k\geqslant(\ln x-x)_{\max}$. … 10 分

令 $t(x)=\ln x-x$，则 $t'(x)=\dfrac{1-x}{x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$t'(x)<0$，$t(x)$ 单调递减，

所以 $t(x)_{\max}=t(1)=-1$，

所以只需 $\ln k\geqslant -1$，解得 $k\geqslant\dfrac{1}{e}$，

所以 k 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$. ……………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。