# 2023—2024 学年度第一学期期末学业水平检测高三数学答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题．每小题 5 分，共 40 分．

1-8：C B A B　　C D C A

二、多项选择题：本大题共 4 小题．每小题 5 分，共 20 分．

9．AD；　　10．AC；　　11．BCD；　　12．AC．

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$-25$；　　14．$\{1,5,7,8\}$；　　15．$\sqrt{2}-\frac{1}{2}$；　　16．$[-\frac{e}{2},\frac{e}{2}]$．

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

**17．（本小题满分 10 分）**

**解：**（1）若 $C=2A$，

则 $\sin B-2\sin A\cos C=\sin(A+C)-2\sin A\cos C$ ……………… 2 分

$=\sin A\cos C+\cos A\sin C-2\sin A\cos C$ ……………… 3 分

$=\sin C\cos A-\cos C\sin A=\sin(C-A)=\sin A$ ……………… 4 分

所以，由正弦定理得：$a=b-2a\cos C$ ……………… 5 分

（2）假设存在 $\triangle ABC$，其三边为三个连续的自然数 $a-1,a,a+1(a>1)$，设所对的角分别为 $A,B,C$，则若最大角是最小角的两倍，即 $C=2A$． ……………… 6 分

由（1）知，$a-1=a-2(a-1)\cos C$，即 $2(a-1)\cos C=1$． ……………… 7 分

由余弦定理知，$\cos C=\dfrac{(a-1)^2+a^2-(a+1)^2}{2a(a-1)}$，

代入上式得 $a^2=5a$，解得 $a=5$，经检验满足条件． ……………… 9 分

于是最大边长为 $a+1=6$．

因此，存在一个 $\triangle ABC$，其三边为三个连续的自然数，最大边长为 $6$．

**18．（本小题满分 12 分）**

**解：**（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=\ln x-x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}(x>0)$ ……………… 2 分

由 $f'(x)>0$ 得，$0<x<1$；由 $f'(x)<0$ 得，$x>1$ ……………… 4 分

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减 ……………… 5 分

（2）（法一）当 $a=1$ 时，$f'(x)=\dfrac{(e^x-x)(x-1)}{x^2}(x>0)$ ……………… 7 分

由（1）可知 $\ln x\le x-1<x$，即 $x<e^x$， ……………… 9 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

因此，$f(x)\ge f(1)=e-1$（当且仅当 $x=1$ 时取得等号） ……………… 12 分

（法二）当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{e^x}{x}-x+\ln x=\dfrac{e^x}{x}-\ln\dfrac{e^x}{x}$ ……………… 7 分

令 $h(x)=\dfrac{e^x}{x}(x>0)$，可知 $h'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x}$，

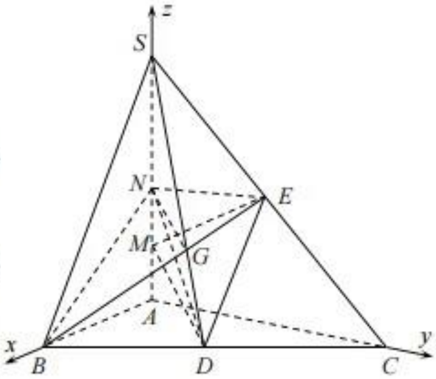
于是 $y=h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

因此，$h(x)=\dfrac{e^x}{x}\ge h(1)=e$（当且仅当 $x=1$ 时取得等号）． ……………… 9 分

令 $k(x)=x-\ln x(x\ge e)$，则由（1）知：故 $k(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 单调递增，

因此 $k(x)\ge e-1$．所以 $f(x)=k(\dfrac{e^x}{x})\ge e-1$ ………………

**19．（本小题满分 12 分）**




**解：** 连接 $SD$ 与 $BE$ 交于点 $G$，

则平面 $SMD$ 与平面平面 $BEN$ 交于 $NG$．

若直线 $DM$ // 平面 $BEN$，

则 $DM$ // $NG$．……………………………………2 分

因为点 $D,E$ 分别为棱 $BC,SC$ 的中点，

故点 $G$ 为三角形 $SBC$ 的重心，满足 $SG=2GD$，

故必有 $SN=2NM$．……………………………3 分

由题意知 $AM=\dfrac{1}{4}SA$，因此点 $N$ 是 $SA$ 的中点，

$AN=\dfrac{1}{2}SA=2$．……………………………………5 分

（2）由题意知，$SA\perp$ 底面 $ABC$，$AB\perp AC$，不妨以点 $A$ 为坐标原点，

以 $AB,AC,AS$ 方向分别建立 $x,y,z$ 轴，则 $S(0,0,4),A(0,0,0),B(2,0,0),C(0,2\sqrt{3},0)$,

$D(1,\sqrt{3},0),E(0,\sqrt{3},2),N(0,0,2),M(0,0,1)$,

设平面 $BEN$ 的一个法向量为 $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{u}\cdot\overrightarrow{BE}=-2x_1+\sqrt{3}y_1+2z_1=0,\\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{BN}=-2x_1+2z_1=0,\end{cases}$，

令 $x_1=1$，则 $y_1=0,z_1=1$，于是 $\vec{u}=(1,0,1)$……………………………………7 分

设平面 $DEM$ 的一个法向量为 $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\vec{v}\cdot\overrightarrow{DE}=-x_2+2z_2=0,\\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{DM}=-x_2-\sqrt{3}y_2+z_2=0,\end{cases}$，

令 $x_2=2$，则 $y_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},z_2=1$，于是 $\vec{v}=(2,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},1)$,……………………………9 分

则 $\cos<\vec{u},\vec{v}>=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times\sqrt{\dfrac{16}{3}}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$……………………………11 分

因此，平面 $BEN$ 与平面 $DEM$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$……………

**20．（本小题满分 12 分）**

**解：**（1）由已知公式得 $\sum\limits_{i=1}^{10}t_iy_i-10\bar{t}\bar{y}\approx14.23-10\times0.14\times3.28\approx9.6$，……………1 分

所以 $\hat{b}=\dfrac{9.6}{4.8}=2.0$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=3.28-2.0\times0.14=3$，故 $\hat{a}=3,\hat{b}=2$……………3 分

（2）（i）由题意知，$X$ 的可能取值为 $2,3,4$，……………………………4 分

$P(X=2)=\dfrac{C_5^2}{C_5^2C_5^2}=\dfrac{1}{10}$，$P(X=3)=\dfrac{C_5^3C_3^1C_2^1}{C_5^2C_5^2}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$,

$P(X=4)=\dfrac{C_5^4C_4^2}{C_5^2C_5^2}=\dfrac{3}{10}$，……………………………………7 分

其分布列为

| $X$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{1}{10}$ | $\dfrac{3}{5}$ | $\dfrac{3}{10}$ |

$E(X)=2\times\dfrac{1}{10}+3\times\dfrac{3}{5}+4\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{16}{5}$．……………………

（ⅱ）当第一轮为 $A$ 时，若第二轮为 $B$，则甲胜；若第二轮为 $A$，则乙胜

所以 $P_1=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$ ……………………………………………10 分

当第一轮为 $B$ 时，若第二轮为 $A$，则最终甲胜的概率为 $\frac{2}{5}P_1$，若第二轮为 $B$，则最终甲胜的概率为 $\frac{2}{5}P_2$；

所以 $P_2=\frac{2}{5}P_1+\frac{2}{5}P_2=\frac{6}{25}+\frac{2}{5}P_2$，解答 $P_2=\frac{4}{25}$ ……………………………11 分

由全概率公式知：甲胜的概率 $P=P_1+P_2=\frac{2}{5}$ ……………………………

**21．（本小题满分 12 分）**

**解：**（1）由题知：$F_1(-1,0),F_2(1,0)$ ……………………………………………1 分

所以 $a^2-b^2=1,e=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，解得 $a=2,b=\sqrt{3}$ ……………………………3 分

所以椭圆 $C_1$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ……………………………………4 分

（2）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

若直线 $l$ 斜率存在，设 $l:y=kx+m$，

因为 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得：$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

所以 $x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$， ……………………………………………5 分

所以 $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{4km}{3+4k^2},\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{k(x_1+x_2)+2m}{2}=\frac{3m}{3+4k^2}$，

设 $W(x_0,y_0)$，所以 $x_0=-\frac{4km}{3+4k^2},y_0=\frac{3m}{3+4k^2}$ ……………………………7 分

所以 $x_0^2=\frac{16k^2m^2}{(3+4k^2)^2},y_0^2=\frac{9m^2}{(3+4k^2)^2}$，

所以，$x_0^2+\frac{4y_0^2}{3}=\frac{m^2(12+16k^2)}{(3+4k^2)^2}=\frac{4m^2}{3+4k^2}$ ……………………………8 分

同理：$x_0^2-\frac{4y_0^2}{3}=\frac{m^2(16k^2-12)}{(3+4k^2)^2}=\frac{4m^2(4k^2-3)}{(3+4k^2)^2}$ ……………………………9 分

因为 $W$ 在曲线 $C_3:(x^2+\frac{4y^2}{3})^2=x^2-\frac{4y^2}{3}$ 上，

所以 $(\frac{4m^2}{3+4k^2})^2=\frac{4m^2(4k^2-3)}{(3+4k^2)^2}$，解得 $4m^2=4k^2-3$ ……………………………10 分

又因为 $\begin{cases}y=kx+m\\ x^2-\frac{4y^2}{3}=1\end{cases}$ 得：$(3-4k^2)x^2-8kmx-4m^2-3=0$，

所以 $\Delta=12(3+4m^2-4k^2)=0$，直线 $AB$ 与 $C_2$ 相切 ……………………………11 分

若直线 $l$ 斜率不存在，由对称性知 $W$ 在 $x$ 轴上，$W$ 在曲线 $C_3:(x^2+\frac{4y^2}{3})^2=x^2-\frac{4y^2}{3}$，

所以 $W(\pm1,0)$，此时也有直线 $AB$ 与 $C_2$ 相切，

综上知：直线 $AB$ 与 $C_2$ 相切 ……………………………

22．（本小题满分 12 分）

**解**：（1）由题意知 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=4\frac{a_n}{a_{n-1}}(n>1)$， ……………………………………………… 1 分

因此数列 $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ 是以 $\frac{a_2}{a_1}=8$ 为首项，以 4 为公比的等比数列，…………………… 3 分

于是 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^{2n+1}, \frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{2n-1}(n>1)$ ……………………………………………… 4 分

$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=2^{(2n-1)+(2n-3)+\cdots+1}=2^{n^2}(n>1)$

又 $a_1=2$ 适合上式，所以 $a_n=2^{n^2}$ ……………………………………………… 6 分

（2）（i）因为 $b_n=2+(2n+1)\ln\frac{n}{n+1}=2+(2n-1)\ln n-(2n+1)\ln(n+1)+2\ln n$，

所以 $S_n=2n+[0-5\ln 2+5\ln 2-7\ln 4+(2n-1)\ln n-(2n+1)\ln(n+1)+2\ln n!$

$=2n-(2n+1)\ln(n+1)+2\ln n!$ ……………………………………………… 9 分

（ii）因为数列 $\{-\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\}$ 的前 $n$ 项和为 $-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n+1})>-\frac{1}{2}$，

所以只需证明：$b_n=2+(2n+1)\ln\frac{n}{n+1}>-\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$ …………………… 10 分

令 $x=\frac{n}{n+1}\in(0,1)$，只需证明 $\ln x>\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$ …………………………… 11 分

设函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x}), x\in(0,1)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}=\frac{-(x-1)^2}{2x^2}\le 0$

所以 $f(x)>f(1)=0$，即 $\ln x>\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$ 成立，得证…………

## 关于我们

**齐鲁家长圈**系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq。**


打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索