山东高中名校 2024 届高三 12 月统一调研考试

数学参考答案及评分标准

说明：本试卷满分 150 分。试题答案请用 2B 铅笔和 0.5mm 签字笔填涂到答题卡规定位置上，书写在试题上的答案无效。考试时间 120 分钟。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	A	A	B	B	C	D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

题号	9	10	11	12
答案	BC	ABD	ABD	AC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．840　　14．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　15．$\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$　　16．16

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．解：（1）因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

所以 $\frac{b^2+c^2-a^2}{\cos A}=\frac{2bc\cos A}{\cos A}=2bc=4$，……3 分

所以 $bc=2$．……4 分

（2）由正弦定理得 $\frac{a\cos B-b\cos A}{a\cos B+b\cos A}=\frac{\sin A\cos B-\sin B\cos A}{\sin A\cos B+\sin B\cos A}$

$=\frac{\sin A\cos B-\sin B\cos A}{\sin(A+B)}=\frac{\sin A\cos B-\sin B\cos A}{\sin C}$

$\frac{b}{c}+1=\frac{b+c}{c}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin C}=\frac{\sin B+\sin(A+B)}{\sin C}$

$=\frac{\sin B+\sin A\cos B+\sin B\cos A}{\sin C}$

所以 $-2\cos A\sin B=\sin B$，……8 分

因为 $B\in(0,\pi)$，故 $0<\sin B\leqslant 1$，所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$，

又 $0<A<\pi$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，……9 分

故 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．……10 分

18．解：（1）$f'(x)=1-\frac{m+2}{x}+\frac{2m}{x^2}=\frac{x^2-(m+2)x+2m}{x^2}$；……1 分

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线 l 垂直于直线 $x-2y+1=0$，

所以 $f'(1)=-2$，即 $1-(m+2)+2m=-2$，解之得 $m=-1$；……3 分

又 $f(1)=3$

所以 l 的方程为 $y-3=-2(x-1)$，即 $2x+y-5=0$……4 分

（2）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

由（1）得 $f'(x)=\frac{x^2-(m+2)x+2m}{x^2}=\frac{(x-2)(x-m)}{x^2}$；

所以当 $m\leqslant 0$ 时，令 $f'(x)>0$ 得 $x>2$，令 $f'(x)<0$ 得 $0<x<2$，

所以 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,2)$ 上单调递减；……6 分

当 $0<m<2$ 时，令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<m$ 或 $x>2$，令 $f'(x)<0$ 得 $m<x<2$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(m,2)$ 上单调递减；……8 分

当 $m=2$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；……9 分

当 $m>2$ 时，令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<2$ 或 $x>m$，令 $f'(x)<0$ 得 $2<x<m$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 和 $(m,+\infty)$ 上单调递增，在 $(2,m)$ 上单调递减……11 分

综上，当 $m\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,2)$ 上单调递减；

当 $0<m<2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,m)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(m,2)$ 上单调递减；

当 $m=2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $m>2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 和 $(m,+\infty)$ 上单调递增，在 $(2,m)$ 上单调递减……12 分

19．解：（1）设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的公比分别为 $p,q(p\neq q)$，

为证 $\{c_n\}$ 不是等比数列只需证 $c_2^2\neq c_1c_3$．……2 分

而 $c_2^2-c_1c_3=(a_1p+b_1q)^2-(a_1+b_1)(a_1p^2+b_1q^2)=-a_1b_1(p-q)^2$，……4 分

由于 $p\neq q$，且 a_1,b_1 不为零，

因此 $c_2^2\neq c_1c_3$，故 $\{c_n\}$ 不是等比数列．……5 分

（2）假设存在常数 k，使得数列 $\{c_{n+1}+kc_n\}$ 为等比数列，则有

$(c_{n+1}+kc_n)^2=(c_{n+2}+kc_{n+1})(c_n+kc_{n-1})$，……6 分

将 $c_n=2^n+3^n$ 代入上式，得

$[2^{n+1}+3^{n+1}+k(2^n+3^n)]^2=[2^{n+2}+3^{n+2}+k(2^{n+1}+3^{n+1})]\cdot[2^n+3^n+k(2^{n-1}+3^{n-1})]$

即 $[(2+k)2^n+(3+k)3^n]^2=[(2+k)2^{n+1}+(3+k)3^{n+1}]\cdot[(2+k)2^{n-1}+(3+k)3^{n-1}]$

整理得 $12(2+k)(3+k)=13(2+k)(3+k)$，……10 分

解得 $k=-2$ 或 $k=-3$．……11 分

经检验，当 $k=-2$ 或 $k=-3$ 时数列 $\{c_{n+1}+kc_n\}$ 为等比数列

所以，存在常数 $k=-2$ 或 $k=-3$，使得数列 $\{c_{n+1}+kc_n\}$ 为等比数列……12 分

20．（1）证明：在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=120^\circ$，$\therefore\angle ADM=60^\circ$，

在 $\triangle ADM$ 中，$AD=2$，$DM=1$，

所以 $AM=\sqrt{AD^2+DM^2-2\cdot AD\cdot DM\cdot\cos\angle ADM}=\sqrt{2^2+1^2-2\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，

可得 $AD^2=AM^2+DM^2$，所以 $AM\perp CD$……2 分

又 $CD//AB$，所以 $AM\perp AB$．

又侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$，$AM\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AM\perp AA_1$．

又 $AB\cap AA_1=A$，$AB,AA_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，所以 $AM\perp$ 平面 AA_1B_1B．……4 分

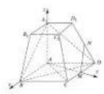
又 $A_1B\subset$ 平面 AA_1B_1B，所以 $AM\perp A_1B$．……5 分

（2）解：因为 M 为 CD 的中点，$DM=1$，$CD=2$，所以四边形 $ABCD$ 为菱形

由（1）知：AB,AM,AA_1 两两垂直，分别以 AB,AM,AA_1 为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，……6 分

则点

$A_1(0,0,2),B(2,0,0),D(-1,\sqrt{3},0),D_1\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right),M(0,\sqrt{3},0)$．



$\overrightarrow{BD}=(-3,\sqrt{3},0),\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-2),\overrightarrow{MD}=(-1,0,0)$．

$\overrightarrow{BD}=(-3,\sqrt{3},0),\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-2),\overrightarrow{MD}=(-1,0,0)$．

设平面 A_1BD 的一个法向量为 $\vec{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则有 $\begin{cases}\vec{n}_1\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1B}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}-3x_1+\sqrt{3}y_1=0\\ 2x_1-2z_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=1$，得 $\vec{n}_1=(1,\sqrt{3},1)$……8 分

因为 $DD_1=\sqrt{5},DN=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

所以 $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}=\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$

则 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DN}=\left(-\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$，$\overrightarrow{A_1M}=(0,\sqrt{3},-2)$，

设平面 A_1MN 的一个法向量为 $\vec{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则有 $\begin{cases}\vec{n}_2\cdot\overrightarrow{MN}=0\\ \vec{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1M}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}-\frac{3}{4}x_2-\frac{\sqrt{3}}{4}y_2+z_2=0\\ \sqrt{3}y_2-2z_2=0\end{cases}$，

令 $x_2=2$，得 $\vec{n}_2=(2,2\sqrt{3},3)$，……10 分

所以 $|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|=\frac{|2+6+3|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{25}}=\frac{11\sqrt{5}}{25}$，……11 分

所以平面 A_1MN 与平面 A_1BD 所成角的余弦值为 $\frac{11\sqrt{5}}{25}$ ……12 分

21．解：（1）由题意：$2a_n=n+S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，①……1 分

$n=1$ 时，$a_1=1$．……2 分

$n\geqslant 2$ 时，$2a_{n-1}=n-1+S_{n-1}$，②

①—②得：$2a_n-2a_{n-1}=1+a_n(n\geqslant 2)$，即 $a_n=2a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$．

所以 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)(n\geqslant 2)$ ……3 分

所以 $\{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=2$ 为首项，2 为公比的等比数列．

所以 $a_n+1=2^n$，所以 $a_n=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$．……5 分

（2）证明：因为 $\frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\frac{2^k-1}{2(2^k-\frac{1}{2})}<\frac{2^k-\frac{1}{2}}{2(2^k-\frac{1}{2})}=\frac{1}{2},k=1,2,\ldots,n$,

所以 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}$ ……7 分

又 $\frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\frac{2^k-1}{2(2^k-\frac{1}{2})}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2^{k+1}-1)}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\times 2^k+2^k-2}\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^k},k=1,2,\ldots,n$，……9 分

所以 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n+1}}\geq\frac{n}{2}-\frac{1}{3}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n})=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}(1-\frac{1}{2^n})>\frac{n}{2}-\frac{1}{3}$ ……11 分

所以 $\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$ ……12 分

22．解：（1）$f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}-a\left(-1+\frac{1}{x}\right)=\frac{(x-1)e^x+ax(x-1)}{x^2}=\frac{(x-1)\left(\frac{e^x}{x}+a\right)}{x}$；……1 分

因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 不是单调函数，所以 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 有变号零点；

因为 $\frac{x-1}{x}>0$ 恒成立，令 $g(x)=\frac{e^x}{x}+a$，则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 有变号零点；……2 分

因为 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

因为 $g(1)=e+a$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，

只需 $e+a<0$，即 $a<-e$，

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-e)$ ……4 分

（2）（法一）令 $\varphi(x)=1-x+\ln x(x>1)$，

因为 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1<0$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

所以 $\varphi(x)<\varphi(1)=0$ ……5 分

所以 $f(x)\geqslant 0\Leftrightarrow a\geqslant\frac{e^x}{x-x^2+x\ln x}$ ……6 分

令 $m(x)=\frac{e^x}{x-x^2+x\ln x}$，

则 $m'(x)=\frac{e^x}{(x-x^2+x\ln x)^2}(x-x^2+x\ln x-1+2x-\ln x-1)$

$=\frac{e^x}{(x-x^2+x\ln x)^2}(x-1)(\ln x-x+2)$；……7 分

令 $h(x)=\ln x-x+2$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1<0$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减；

因为 $h(1)=1>0$，$h(4)=\ln 4-2<0$；

所以 $h(x)$ 有唯一零点 x_0，且 $x_0\in(1,4)$，$\ln x_0=x_0-2\Leftrightarrow x_0e^2=e^{x_0}$ ……9 分

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$h(x)>0$，即 $m'(x)>0$，所以 $m(x)$ 在 $(1,x_0)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，即 $m'(x)<0$，所以 $m(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 单调递减；……10分

所以 $m(x)_{\max}=m(x_0)=\frac{e^{x_0}}{x_0-x_0^2+x_0\ln x_0}=\frac{x_0e^2}{x_0-x_0^2+x_0(x_0-2)}=-e^2\approx-7.39$；

所以实数 a 的最小整数值为 -7 ……12分

（法二）$f'(x)=\frac{(x-1)\left(\frac{e^x}{x}+a\right)}{x}$

由（1）得，当 $a\geqslant -e$ 时，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)>f(1)=e>0$ 成立．……6分

当 $a<-e$ 时，存在 $x_0\in(1,+\infty)$，使得 $f'(x)=0$，$a=-\frac{e^{x_0}}{x_0}$

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增；……8分

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=\frac{e^{x_0}}{x_0}-a(1-x_0+\ln x_0)=-a-a\left(1+\ln\frac{x_0}{e^{x_0}}\right)=-a[2-\ln(-a)]$

令 $-a[2-\ln(-a)]>0$ 得 $\ln(-a)\leqslant 2$；

解之得 $-e^2\leqslant a<-e$．……11分

综上，$a\geqslant -e^2\approx-7.39$，

所以实数 a 的最小整数值为 -7．……12分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索