

2024 年普通高等学校招生全国统一考试仿真模拟卷(T8 联盟)

数学试题(二)

命题学校:襄阳五中

命、审题人:苏代辉 颜俊波 闫小东

试卷满分:150 分

考试用时:120 分钟

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x < 2\}$, $B = \{x | \frac{2}{x-3} \geq -1\}$, 则 $A \cap \complement_{\mathbb{R}} B =$
 A. $(-\infty, 1)$ B. $(1, 3]$ C. $(0, 1)$ D. $(1, 3)$
2. 若复数 z 满足 $z(3-i) = 7+i$, 则 $\bar{z}$ 的虚部是
 A. 1 B. -1 C. i D. -i
3. 已知 $\sin(\frac{\pi}{6} - \theta) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, 则 $\cos(2\theta - \frac{\pi}{3}) =$
 A. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , $a_1 > 0$, 设甲: $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 乙: $q > 0$, 则甲是乙的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 已知直线 l 过定点 $(0, 2)$, 若 l 与双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 没有公共点, 则直线 l 的斜率可能为
 A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 3 D. 2



6. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 下列说法错误的是
- A. 若 $\sin B = \cos A$, 则 $\triangle ABC$ 为直角三角形
- B. $\cos 2A < \cos 2B$ 是 $a > b$ 的充要条件
- C. 若 a, b, c 成等差数列, 则 $0 < B \leq \frac{\pi}{3}$
- D. 满足条件 $a = \sqrt{3}, b = \frac{3}{2}, B = \frac{\pi}{3}$ 的三角形面积是唯一确定的
7. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, 设 $a = f(\cos 2), b = f\left(\ln \frac{1}{2}\right), c = f\left(\frac{1}{2}\right)$, 则
- A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $a < c < b$
8. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且满足 $f(2x+2) = -f(2x)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = 4^x - 1$, 则下列选项不正确的是
- A. $f(\log_2 3) = \frac{7}{9}$
- B. $x=1$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴
- C. 方程 $f(x) + 2 = 0$ 在 $[-2, 12]$ 上所有根之和为 42
- D. $\sum_{k=1}^{2023} f(k) = 0$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法不正确的是
- A. 已知一组数据 5, 3, 8, 6, 10, 7, 6, 4, 8, 7 的第 70 百分位数为 7.5
- B. 经验回归方程的决定系数 R^2 越大, 表示残差平方和越大, 即模型的拟合效果越差
- C. 样本相关系数等于 0 时, 表明成对样本数据没有相关关系
- D. 若随机变量 $\xi \sim N(2, \sigma^2)$, $P(\xi \geq 4) = 0.23$, 则 $P(\xi \geq 0) = 0.54$
10. 已知直线 $l: x \cos \theta + y \sin \theta - 2 \cos \theta - 1 = 0, (\theta \in [0, 2\pi))$, 下列说法正确的是
- A. 存在平面上的定点到直线 l 的距离为一个定值
- B. 存在 $\theta \in [0, 2\pi)$, 使得点 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 在某条直线 l 上
- C. 存在 $\theta \in [0, 2\pi)$, 使得某条直线 l 与直线 $x - \sqrt{3}y = 0$ 平行
- D. 对于任意 $\theta \in [0, 2\pi)$, 平面上直线 l 均不经过的点组成的区域面积为 π

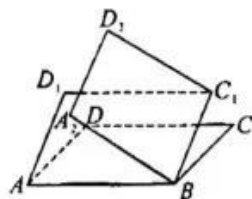


11. 设 A, B 为同一随机试验的两个随机事件, 且它们发生的概率 $P(A), P(B)$ 均不为 0, 下列说法一定正确的是

- A. 若 $P(A) = P(B)$, 则 $P(\overline{AB}) = P(\overline{AB})$
 B. 若 $p(B) = \frac{1}{3}$, 则 $P(A) - P(\overline{B}) = P(\overline{AB}) - P(\overline{AB})$
 C. 若 $P(A|B) = P(A|\overline{B})$, 则事件 A, B 相互独立
 D. 若 $P(A) = 0.4, P(B|A) = 0.25, P(B|\overline{A}) = 0.5$, 则 $P(B|A) = P(A|B)$

12. 如图, 水平放置的正方形 $ABCD$ 边长为 1, 先将正方形 $ABCD$ 绕直线 AB 向上旋转 45° , 得到正方形 ABC_1D_1 , 再将所得的正方形绕直线 BC_1 向上旋转 45° , 得到正方形 $A_2BC_1D_2$, 则

- A. 直线 C_1D_2 与直线 BC 的夹角为 60°
 B. 直线 $A_2C_1 \parallel$ 平面 $ABCD$
 C. 点 D_2 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$
 D. 平面 $A_2BC_1D_2$ 与平面 $ABCD$ 所成的锐二面角为 60°



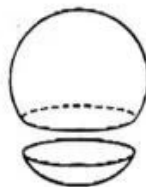
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(3x-5)^{2023} = a_0 + a_1(x-1) + \dots + a_{2023}(x-1)^{2023}$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2023} =$ _____.

14. 一个球体被平面截下的一部分叫作球缺, 截面叫作球缺的底面, 垂直于底面的直径被截后, 剩下的线段长叫作球缺的高, 球缺曲面部分的面积 $S = 2\pi RH$, 其体积

为 $V = \frac{1}{3}\pi(3R-H)H^2$, 其中 R 为球的半径, H 为球缺的高. 如图, 已知一

个半径为 R 的球体被平面所截获得两个球缺, 若它们的表面积(包括底



面)之比 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{15}{7}$, 则其体积之比 $\frac{V_1}{V_2} =$ _____.

15. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$, 过点 $M(\sqrt{2}, 0)$ 与抛物线交于 A, B 两点, 设 $N(\sqrt{3}, 0)$, 分别延长直线 AN, BN 交抛物线于 C, D 的两点, 设直线 AB 的斜率为 k_1 , 直线 CD 的斜率为 k_2 ,

则 $\frac{k_1}{k_2} =$ _____.

16. 已知 $a > 0$, 若对 $\forall x > 0$, 有 $\frac{x}{e^x} - \ln a \leq x - \ln x + a$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为 _____.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $2\sin 2B - 2\sin(A-B) = 1$ ， $C = \frac{\pi}{6}$ 。

(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状；

(2) 若 $a = \sqrt{6}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

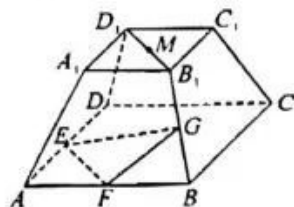
18. (本小题满分 12 分)

正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ， $A_1B_1=1$ ，侧棱 AA_1 与底面所成角为 $\frac{\pi}{3}$ ， E, F, G

分别为 AD, AB, BB_1 的中点， M 为线段 B_1D_1 上一动点(包括端点)。

(1) 试探究三棱锥 $E-FGM$ 的体积是否为定值？若是，求出该定值，若不是，请说明理由；

(2) 求平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成夹角的余弦值。





19. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} + a_n \cos[(n+1)\pi] = (-1)^n + 1, S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} ;

(2) 设数列 $b_n = \frac{1}{(a_{2n} - 1)^2}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < \frac{5}{12}$.

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - \lambda \sin x$.

(1) 若 $\lambda = 3$, 证明: 对任意 $x \in (0, \pi)$, 都有 $f(x) > 0$ 成立;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) + (\lambda + 3)\sin x - 1 - ax$, 当 $1 \leq a < 4$ 时, 讨论函数 $g(x)$ 零点的个数.

(参考数据: $e^{\frac{1}{2}} \approx 2.193, \sqrt{2} \approx 1.414$)

21. (本小题满分 12 分)

甲、乙、丙三人进行猜拳比赛,比赛规则如下:三人采用单循环赛(任意两人之间只赛一次),只赛一轮,每次比赛获胜者积 3 分,落败者积 0 分,平局各积 1 分.已知甲和乙比赛时,甲获胜的概率为 $\frac{2}{3}$,甲落败的概率为 $\frac{1}{6}$;甲和丙比赛时,甲获胜的概率为 $\frac{1}{2}$,甲落败的概率为 $\frac{1}{4}$;乙和丙比赛时,乙获胜的概率为 $\frac{1}{4}$,乙落败的概率为 $\frac{2}{3}$.各场比赛相互独立,求:

- (1)乙积分的期望;
- (2)乙和丙积分相同的概率.

22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$,其短轴长为 2,设右焦点为 F .

- (1)求椭圆 E 的方程;
- (2)过点 F 作互相垂直的两条直线 l_1, l_2 ,其中 l_1 与椭圆 E 交于 A, B 两点, l_2 与椭圆 E 交于 C, D 两点.并设线段 AB, CD 的中点分别为 M, N .
 - ①求四边形 $ACBD$ 的面积的最小值;
 - ②探究直线 MN 是否过定点,若是求出该定点,若不是请说明理由.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线