绝密★启用前

大联考

2023—2024 学年(上)高二年级期末考试

数　学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程是

A. $x=-1$　　B. $x=-2$　　C. $y=-1$　　D. $y=-2$

2. 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，若 $a_1+a_3=25$，则 $a_5=$

A. 100　　B. 80　　C. 50　　D. 40

3. 已知直线 $l_1:ax+3y-5=0$ 与 $l_2:(3a-2)x+ay+4=0$ 垂直，则 $a=$

A. 0　　B. 0 或 $-\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. 0 或 $\frac{2}{3}$

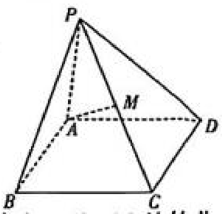
4. 一个做直线运动的质点的位移 s(m) 与时间 t(s) 的关系式为 $s=100t-5t^2$，则该质点的瞬时速度为 0 m/s 时，$t=$

A. 50 s　　B. 20 s　　C. 10 s　　D. 5 s

5. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_n+a_{n+1}=2$，且 $S_{2\,025}=2\,027$，则 $a_1=$

A. 6　　B. 5　　C. 3　　D. 1

6. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$AB=2$，$\angle DAB=\frac{2\pi}{3}$，$M$ 为棱 PC 的中点，且 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=4$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=$



A. 6　　B. 8

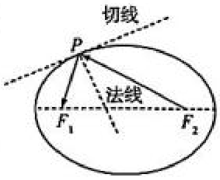
C. 9　　D. 10

7. 曲率是数学上衡量曲线弯曲程度的重要指标，对于曲线 $y=f(x)$，其在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的曲率 $K=\frac{|f''(x_0)|}{(1+(f'(x_0))^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导函数. 已知抛物线

$x^2=2py(p>0)$的焦点到准线的距离为2,则该抛物线上的各点处的曲率最大值为

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

8. 椭圆具有如下光学性质:从椭圆的一个焦点发出的光线,经过椭圆反射后,反射光线过椭圆的另一个焦点(如图). 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过点 F_2 的直线与 E 交于点 A, B,过点 A 作 E 的切线 l,点 B 关于 l 的对称点为 M,若 $|AB|=\frac{8a}{5}$, $\frac{|BF_1|}{|MF_1|}=\frac{2}{3}$,则$\frac{S_{\triangle MF_1F_2}}{S_{\triangle AF_1F_2}}=$



注:S 表示面积.

A. 2　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 3　　D. $\frac{7}{2}$

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分. 在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2+3$,则

A. $a_2=3$　　B. $a_n=2n-1$

C. $\{a_{2n}\}$是等差数列　　D. $\{a_n\}$是递增数列

10. 已知曲线 $C:\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{6-m}=1$,则

A. 当 $m<2$ 时,曲线 C 是椭圆

B. 当 $m=3$ 时,曲线 C 是以直线 $y=\pm\sqrt{3}x$ 为渐近线的双曲线

C. 存在实数 m,使得 C 过点$(1,1)$

D. 当 $m\in(2,6)$时,直线 $y=x$ 总与曲线 C 相交

11. 已知圆 $O_1:x^2+y^2-2x=0$ 和圆 $O_2:x^2+y^2+2x-4y+1=0$,则

A. 圆 O_2 与 x 轴相切

B. 两圆公共弦所在直线的方程为 $x-y+1=0$

C. 有且仅有一个点 P,使得过点 P 能作两条与两圆都相切的直线

D. 两圆的公切线段长为$\sqrt{7}$

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1,E,F 分别是棱 A_1D_1 和 CD 的中点,G 是棱 BB_1 上的一点,P 是正方形 ABB_1A_1 内一动点,且点 P 到直线 A_1B_1 与直线 BC 的距离相等,则

A. $EG\perp AF$　　B. 点 D_1 到直线 AF 的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. 存在点 G,使得 $GE//$平面 ACD_1　　D. 动点 P 在一条抛物线上运动

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 曲线 $y=e^x\ln x$ 在点(1,0)处的切线方程为__________.

14. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1,m)$，$\boldsymbol{b}=(1,3,0)$ 分别为异面直线 l_1,l_2 的方向向量，若 l_1,l_2 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$，则 $m=$__________.

15. 已知 F_1,F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，P 为 C 上一点，且 $\angle POF_2=\frac{\pi}{3}$（$O$ 为坐标原点），$PF_1\perp PF_2$，则 C 的离心率为__________.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，其前 n 项和为 S_n，不等式 $p\leq\frac{S_n}{2}-\frac{2}{S_n}\leq q$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，则 $q-p$ 的最小值为__________.

四、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）

已知公比不为1的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 a_2,a_3,a_1 是等差数列 $\{b_n\}$ 的前三项.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

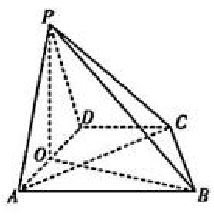
（Ⅱ）求数列 $\{4b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（12分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$AB\perp AD$，O 为棱 AD 的中点，$PO\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AD=AB=2CD=2$.

（Ⅰ）求证：$AC\perp PB$；

（Ⅱ）求直线 PC 与平面 POB 所成角的正弦值.



19.（12 分）

已知圆 $C:(x-a)^2+y^2=(a-1)^2(a>0)$，过点 $P(1,\sqrt{3})$ 作圆 C 的两条切线，切点分别为 A,B，且 $\angle APB=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）过点 $D(1,0)$ 作两条互相垂直的直线，分别与圆 C 交于不同于点 D 的两点 M,N，若 $|MD||ND|=\sqrt{2}$，求直线 MN 的方程.

20.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数，前 n 项和为 S_n，且 $2S_na_n=a_n^2+1$.

（Ⅰ）证明：$\{S_n^2\}$ 是等差数列；

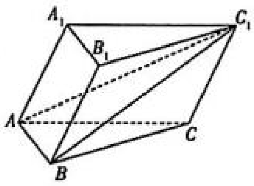
（Ⅱ）求数列 $\{2^n\cdot S_n^2\}$ 的前 n 项和 T_n.

21.（12 分）

如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp BC$，$\angle CAB=\frac{\pi}{3}$，$AC=2$，且三棱锥 C_1-ABC 的体积为 $\frac{1}{4}$.

（Ⅰ）求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高；

（Ⅱ）若平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1，$AA_1=1$，$\angle A_1AC$ 为锐角，求二面角 C_1-AB-C 的余弦值.



22.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点为 $A(0,1)$，右顶点为 B，且直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求 C 的方程；

（Ⅱ）若直线 l 与 C 交于 P,Q 两点（异于点 B），且满足 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{QB}=0$，求 $\triangle PQB$ 面积的最大值.

大联考
2023—2024 学年(上)高二年级期末考试
数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　A

命题意图　本题考查抛物线的准线.

解析　因为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线方程是 $x=-\frac{p}{2}$,故选 A.

2. 答案　B

命题意图　本题考查等比数列的性质.

解析　设$\{a_n\}$的公比为 q,则 $q=2$,$a_1+a_3=a_1(1+q^2)=5a_1=25$,所以 $a_1=5$,所以 $a_5=a_1q^4=5\times16=80$.

3. 答案　B

命题意图　本题考查直线与直线垂直.

解析　若 $l_1\perp l_2$,则有 $a(3a-2)+3a=0$,解得 $a=0$ 或 $a=-\frac{1}{3}$.

4. 答案　C

命题意图　本题考查导数的概念和计算.

解析　由题意知 $s=100t-5t^2$,则 $s'=100-10t$,当 $t=10$ 时,$s'=0$,即瞬时速度为 0 m/s.

5. 答案　C

命题意图　本题考查数列的求和.

解析　因为 $a_n+a_{n+1}=2$,所以 $S_{2\,025}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2\,024}+a_{2\,025})=a_1+2\times1\,012=2\,027$,所以 $a_1=3$.

6. 答案　A

命题意图　本题考查空间向量的线性运算.

解析　$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+4+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=4$,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=6$.

7. 答案　D

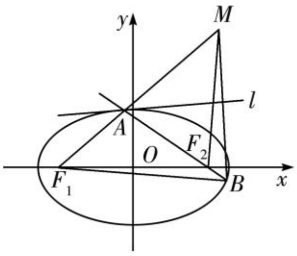
命题意图　本题考查导数的计算、抛物线的性质.

解析　由题可知抛物线方程为 $x^2=4y$,即 $y=\frac{1}{4}x^2$,则 $y'=\frac{1}{2}x$,$y''=\frac{1}{2}$,则该抛物线在各点处的曲率 $K=\frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$,当 $x=0$ 时,K 取最大值$\frac{1}{2}$.

8. **答案** C

命题意图 本题考查椭圆与直线的位置关系.

解析 如图,由椭圆的光学性质可得 M,A,F_1 三点共线. 设 $|BF_2|=x$,则 $|BF_1|=2a-x$, $|MF_1|=|AF_1|+|MA|=|AF_1|+|AF_2|+|BF_2|=2a+x$. 故 $\dfrac{|BF_1|}{|MF_1|}=\dfrac{2a-x}{2a+x}=\dfrac{2}{3}$,解得 $x=\dfrac{2a}{5}$. 又 $|AB|=\dfrac{8a}{5}$,所以 $|AF_2|=\dfrac{6a}{5}$, $|AF_1|=\dfrac{4a}{5}$,所以 $\dfrac{S_{\triangle MF_1F_2}}{S_{\triangle AF_1F_2}}=\dfrac{|MF_1|}{|AF_1|}=3$.



二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. **答案** AC

命题意图 本题考查数列的性质.

解析 $a_2=S_2-S_1=3$,故 A 正确;当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$,当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=4$,不适合上式,故 B 错误;$\{a_n\}$ 从第 2 项开始为等差数列,所以其偶数项构成等差数列,故 C 正确;因为 $a_1=4>a_2=3$,故 D 错误.

10. **答案** ABC

命题意图 本题考查圆锥曲线的方程与性质.

解析 当 $m<2$ 时,$\begin{cases}2-m>0,\\6-m>0,\end{cases}$ 方程 $\dfrac{x^2}{2-m}+\dfrac{y^2}{6-m}=1$ 表示的曲线是椭圆,故 A 正确;当 $m=3$ 时,方程为 $\dfrac{y^2}{3}-x^2=1$,其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$,故 B 正确;令 $\dfrac{1}{2-m}+\dfrac{1}{6-m}=1$,整理得 $m^2-6m+4=0(m\neq 2$ 且 $m\neq 6)$,此方程有解,故 C 正确;当 $m=4$ 时,曲线 C 为双曲线 $\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{2}=1$,直线 $y=x$ 为 C 的一条渐近线,此时无交点,故 D 错误.

11. **答案** ACD

命题意图 本题考查圆的方程,圆与圆的位置关系.

解析 圆 $O_1:(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心为 $O_1(1,0)$,半径 $r_1=1$,圆 $O_2:(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 的圆心为 $O_2(-1,2)$,半径 $r_2=2$.

对于 A,显然圆 O_2 与 x 轴相切,故 A 正确;

对于 B,易知两圆相交,将方程 $x^2+y^2-2x=0$ 与 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 相减,得公共弦所在直线的方程为 $4x-4y+1=0$,故 B 错误;

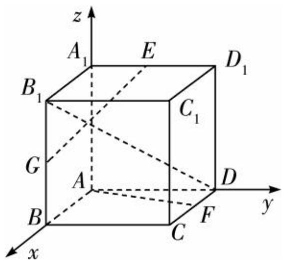
对于 C,两圆相交,所以两圆的公切线只有两条,又因为两圆半径不相等,所以公切线交于一点 P,即过点 P 可以作出两条与两圆都相切的直线,故 C 正确;

对于 D,因为 $|O_1O_2|=2\sqrt{2}$, $r_2-r_1=1$,所以公切线段长为 $\sqrt{|O_1O_2|^2-(r_2-r_1)^2}=\sqrt{7}$,故 D 正确.

12. **答案** AD

命题意图 本题考查空间向量在立体几何中的应用.

解析 建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$.



对于 A,易知 $A(0,0,0)$,$F\left(\frac{1}{2},1,0\right)$,$E\left(0,\frac{1}{2},1\right)$,$G(1,0,m)$ $(m\in[0,1])$,所以$\overrightarrow{EG}=\left(1,-\frac{1}{2},m-1\right)$,$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$,所以$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EG}=0$,所以 $EG\perp AF$,故 A 正确;

对于 B,易得$\overrightarrow{AD_1}=(0,1,1)$,则$\overrightarrow{AD_1}$在$\overrightarrow{AF}$方向上的投影向量的模为$\frac{|\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{AF}|}=\frac{2}{\sqrt{5}}$,则点 D_1 到直线 AF 的距离为$\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{\sqrt{30}}{5}$,故 B 错误;

对于 C,易知平面 ACD_1 的一个法向量为$\overrightarrow{B_1D}=(-1,1,-1)$,而$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{B_1D}=-\frac{1}{2}-m\neq0$,故 C 错误;

对于 D,因为 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1,$PB\subset$ 平面 ABB_1A_1,所以 $PB\perp BC$,点 P 到直线 BC 的距离即点 P 到点 B 的距离,所以 P 点的轨迹是以 B 为焦点,A_1B_1 所在直线为准线的抛物线的一部分,故 D 正确.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** $y=e(x-1)$

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 设 $f(x)=e^x\ln x$,则 $f'(x)=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}$,所以 $f'(1)=e$,所以曲线 $y=e^x\ln x$ 在点$(1,0)$处的切线方程为 $y=e(x-1)$.

14. **答案** $\pm\sqrt{2}$

命题意图 本题考查直线的方向向量.

解析 设 l_1,l_2 所成的角为 θ. 由题意知 $\cos\theta=\frac{|1-3|}{\sqrt{2+m^2}\cdot\sqrt{1+9}}=\frac{2}{\sqrt{2+m^2}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,解得 $m=\pm\sqrt{2}$.

15. **答案** $\sqrt{3}+1$

命题意图 本题考查双曲线与直线的位置关系.

解析 设双曲线的半焦距为 $c(c>0)$,则 $c^2=a^2+b^2$. 因为 $PF_1\perp PF_2$,所以$|PO|=\frac{1}{2}|F_1F_2|=c$,在$\triangle POF_2$ 中,$\angle POF_2=\frac{\pi}{3}$,$|PO|=|OF_2|$,所以$\triangle POF_2$ 为等边三角形,所以$|PF_2|=c$,根据双曲线定义可得$|PF_1|=2a+c$,在 Rt$\triangle PF_1F_2$ 中,由勾股定理可得$(2a+c)^2+c^2=4c^2$,整理得$\frac{c}{a}=\sqrt{3}+1$,所以 C 的离心率为$\sqrt{3}+1$.

16. **答案** $\frac{17}{12}$

命题意图 本题考查数列的综合性质.

解析 由题意可得 $S_n=2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，当 n 为奇数时，$S_n=2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$，随着 n 值的增大而减小，所以 $S_n=2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\in(2,3]$，当 n 为偶数时，$S_n=2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$，随着 n 值的增大而增大，所以 $S_n=2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\in\left[\frac{3}{2},2\right)$，所以 $S_n\in\left[\frac{3}{2},2\right)\cup(2,3]$，又因为函数 $y=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$ 在 $\left[\frac{3}{2},3\right]$ 上单调递增，所以当 $x\in\left[\frac{3}{2},2\right)\cup(2,3]$ 时，$y=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\in\left[-\frac{7}{12},0\right)\cup\left(0,\frac{5}{6}\right]$，所以 $q\geqslant\frac{5}{6}$，$p\leqslant-\frac{7}{12}$，所以 $q-p$ 的最小值为 $\frac{17}{12}$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查等比数列与等差数列的性质、等差数列求和.

解析 （Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q\neq1)$，

因为 a_2,a_3,a_1 成等差数列，所以 $2a_3=a_2+a_1$，…………（1 分）

即 $2q^2=q+1$，解得 $q=-\frac{1}{2}$ 或 1（舍去）. …………（3 分）

所以 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. …………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $\{b_n\}$ 的前三项为 $-\frac{1}{2},\frac{1}{4},1$，…………（6 分）

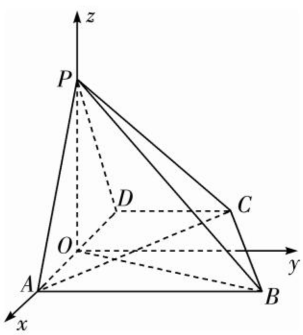
所以 $b_n=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{3}{4}n-\frac{5}{4}$，…………（7 分）

所以 $4b_n=3n-5$. …………（8 分）

所以 $S_n=\frac{(-2+3n-5)n}{2}=\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{2}n$. …………（10 分）

18. **命题意图** 本题考查空间向量在立体几何中的应用.

解析 由题可知 OP,AD,AB 两两互相垂直，所以以 OA 所在直线为 x 轴，过 O 与 AB 平行的直线为 y 轴，OP 所在直线为 z 轴建立如图的空间直角坐标系. …………（1 分）



（Ⅰ）易知 $A(1,0,0)$，$B(1,2,0)$，$C(-1,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$. …………（2 分）

所以 $\overrightarrow{AC}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{PB}=(1,2,-\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，…………（4 分）

所以 $AC\perp PB$. …………（5 分）

(Ⅱ)因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PO\perp AC$. ………………………………………………………… (6 分)

由(Ⅰ)知 $AC\perp PB$,又 $PB\cap PO=P$,

所以 $AC\perp$ 平面 POB,即 $\overrightarrow{AC}=(-2,1,0)$ 是平面 POB 的一个法向量. ………………………… (8 分)

又因为 $\overrightarrow{PC}=(-1,1,-\sqrt{3})$, ……………………………………………………………………… (9 分)

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{PC}|}=\dfrac{2+1}{\sqrt{4+1+0}\times\sqrt{1+1+3}}=\dfrac{3}{5}$, ………………………………… (11 分)

所以直线 PC 与平面 POB 所成角的正弦值为 $\dfrac{3}{5}$. ……………………………………………… (12 分)

19. **命题意图** 本题考查直线与圆的位置关系.

解析 (Ⅰ)由题意可知圆 C 的圆心为 $C(a,0)$,半径 $r=|a-1|$. ………………………………… (1 分)

因为 $\angle APB=\dfrac{\pi}{3}$,$AP\perp AC$,所以 $\angle APC=\dfrac{\pi}{6}$,从而 $|PC|=2|AC|=2r$, ………………………… (3 分)

即 $\sqrt{(a-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2|a-1|$,两边平方整理得 $a^2-2a=0$,

又因为 $a>0$,所以 $a=2$. …………………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知圆 $C:(x-2)^2+y^2=1$,点 $D(1,0)$ 在圆 C 上,

又因为 $MD\perp ND$,所以线段 MN 为圆 C 的直径,即直线 MN 过圆心$(2,0)$,

显然直线 MN 的斜率不为0,设其方程为 $x-2=ty$, ……………………………………………… (7 分)

点 $D(1,0)$ 到直线 MN 的距离为 $d=\dfrac{|1-2|}{\sqrt{1+t^2}}$. ……………………………………………………… (8 分)

根据三角形的面积公式可得 $d=\dfrac{|MD||ND|}{|MN|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………… (9 分)

所以 $\dfrac{|1-2|}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $t=\pm1$, ……………………………………………………………… (11 分)

所以直线 MN 的方程为 $x-y-2=0$ 或 $x+y-2=0$. ………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查数列的递推关系以及数列求和.

解析 (Ⅰ)在 $2S_na_n=a_n^2+1$ 中,令 $n=1$,得 $S_1=1$, ……………………………………… (2 分)

当 $n\geqslant2$ 时,由 $2S_na_n=a_n^2+1$,得 $2S_n(S_n-S_{n-1})=(S_n-S_{n-1})^2+1$, ………………………… (4 分)

整理得 $S_n^2-S_{n-1}^2=1(n\geqslant2)$, ……………………………………………………………………… (5 分)

所以数列$\{S_n^2\}$是首项为1,公差为1的等差数列. ………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $S_n^2=1+(n-1)\times1=n$. ………………………………………………………… (7 分)

所以 $T_n=1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n$①,

$2T_n=1\cdot2^2+2\cdot2^3+3\cdot2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1}$②, ……………………………………………… (9 分)

①-②,得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$, ………… (11 分)

所以 $T_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$. ………………………………………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查立体几何综合问题以及空间向量的应用.

解析 (Ⅰ)设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h.

因为 $AB\perp BC,\angle CAB=\frac{\pi}{3},AC=2$,

所以 $AB=1,BC=\sqrt{3},S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………………………………………（2 分）

因为 $V_{C_1-ABC}=\frac{1}{3}h\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}$, …………………………………………………………（3 分）

所以 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………………………（5 分）

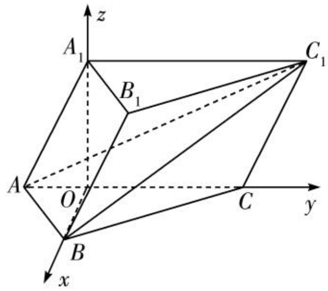
（Ⅱ）过点 A_1 作 $A_1O\perp AC$ 于点 O,连接 BO.

因为平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1,平面 $ABC\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AC$,所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC.

由（Ⅰ）知 $A_1O=\frac{\sqrt{3}}{2}$,又因为 $AA_1=1,\angle A_1AC$ 为锐角,所以 $AO=\frac{1}{2}$. ……………………………（6 分）

在 $\triangle ABO$ 中,$AB=1,AO=\frac{1}{2},\angle OAB=\frac{\pi}{3}$,所以 $BO\perp AC$.

以 O 为坐标原点,分别以 OB,OC,OA_1 所在直线为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,………（7 分）



则 $A\left(0,-\frac{1}{2},0\right),B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right),C_1\left(0,2,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

所以$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right),\overrightarrow{BC_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},2,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面 ABC_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x+2y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},5)$, ……………………………………（9 分）

易知平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$. ………………………………………………………（10 分）

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{5}{\sqrt{29}}=\frac{5\sqrt{29}}{29}$,

所以二面角 C_1-AB-C 的余弦值为$\frac{5\sqrt{29}}{29}$. ………………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查椭圆的性质、椭圆与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）依题意可得 $B(a,0),b=1$, …………………………………………………………（1 分）

由$\frac{1-0}{0-a}=-\frac{1}{2}$,得 $a=2$, ……………………………………………………………………（3 分）

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)易知 l 不与 x 轴平行,设其方程为 $my=x-t(t\neq 2)$,

由 $\begin{cases}x^2+4y^2=4,\\ x=my+t,\end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2+2mty+t^2-4=0$, …………………………………… (5 分)

由 $\Delta=4m^2t^2-4(m^2+4)(t^2-4)=16m^2-16t^2+64>0$,得 $t^2<m^2+4$.

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=\frac{-2mt}{m^2+4}$,$y_1y_2=\frac{t^2-4}{m^2+4}$①, ……………………………… (6 分)

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{QB}=(2-x_1)(2-x_2)+y_1y_2=0$,即 $(my_1+t-2)(my_2+t-2)+y_1y_2=0$,

所以 $(m^2+1)y_1y_2+m(t-2)(y_1+y_2)+(t-2)^2=0$,

将①代入,整理得 $5t^2-16t+12=0$,即 $(5t-6)(t-2)=0$,解得 $t=\frac{6}{5}$ 或 $t=2$(舍去),

所以直线 l 的方程为 $my=x-\frac{6}{5}$,即直线 l 过定点 $\left(\frac{6}{5},0\right)$. ……………………………………… (8 分)

$S_{\triangle PQB}=\frac{1}{2}\times\left(2-\frac{6}{5}\right)\times|y_1-y_2|=\frac{2}{5}|y_1-y_2|=\frac{2}{5}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$ ……………………… (9 分)

$=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{12^2m^2}{25(m^2+4)^2}+\frac{4\times 64}{25(m^2+4)}}=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{12^2m^2}{25(m^2+4)^2}+\frac{4\times 64(m^2+4)}{25(m^2+4)^2}}=\frac{8}{25}\sqrt{\frac{25m^2+64}{(m^2+4)^2}}$, ………… (10 分)

令 $n=m^2+4$,则 $n\geqslant 4$,$\frac{1}{n}\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$,

$S_{\triangle PQB}=\frac{8}{25}\sqrt{\frac{25(n-4)+64}{n^2}}=\frac{8}{25}\sqrt{-\frac{36}{n^2}+\frac{25}{n}}\in\left(0,\frac{16}{25}\right]$,

当 $\frac{1}{n}=\frac{1}{4}$,即 $n=4$ 时,$S_{\triangle PQB}$ 最大,且最大值为 $\frac{16}{25}$. ……………………………………… (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛、少年班、研学实践、综合素质评价、新高考选科、大学专业、志愿填报、港澳升学、中外合作校、大学保研留学等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。