

机密★启用前

试卷类型 A

山东名校考试联盟
高三年级下学期开学联考
数学试题

2024.2

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的考生号、姓名、考点学校、考场号及座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单选题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 二项式 $(3x+2)^4$ 的展开式中常数项为

- A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

2. 欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ (e 是自然对数的底数, j 是虚数单位)是由瑞士著名数学家欧拉提出的,它将指数函数的定义域扩大到复数,建立了三角函数与指数函数的关系。已知 $z = ie^{j\theta}$, 则 $|z| =$

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

3. 已知非零向量 a, b 满足 $|a| = |b|$, 且 $|a+2b| = \sqrt{3}|a|$, 则 a 与 b 夹角为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

4. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + ax)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 则实数 a 的值是

- A. 1 B. ± 1 C. 2 D. ± 2

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 是以 a_1 为首项, q 为公比的等比数列, 则“ $a_1(1-q) > 0$ ”是“ $\{a_n\}$ 是单调递减数列”的

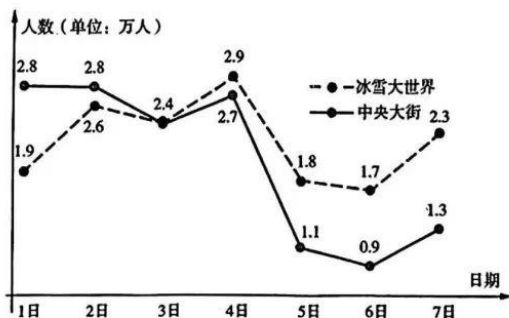
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

高三数学试题 第 1 页 (共 4 页)

6. 若曲线 $f(x) = e^x$ 在 $x=1$ 处的切线与曲线 $g(x) = \ln x + a$ 也相切, 则 $a =$
 A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2
7. 已知点 P 是直线 $l: x + y + 4 = 0$ 上一动点, 过点 P 作圆 $C: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为
 A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2
8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , O 为原点, 以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线交于点 P , 且 $\tan \angle POF_2 = \frac{24}{7}$, 则双曲线 C 的离心率为
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

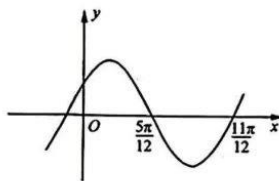
二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每个小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 进入冬季哈尔滨旅游火爆全网, 下图是 2024 年 1 月 1 日到 1 月 7 日哈尔滨冰雪大世界和中央大街日旅游人数的折线图, 则



- A. 中央大街日旅游人数的极差是 1.2 B. 冰雪大世界日旅游人数的中位数是 2.3
 C. 冰雪大世界日旅游人数的平均数比中央大街大 D. 冰雪大世界日旅游人数的方差比中央大街大
10. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示, 则

- A. $\omega = 2$
 B. $x = \frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴
 C. $f^2(x) - (a+1)f(x) + a = 0$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上有两个不相等的解, 则 $a \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
 D. 已知函数 $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}\sin^2 x$, 当 $g(x)$ 取最大值时, $\sin 2x = \frac{2\sqrt{39}}{13}$



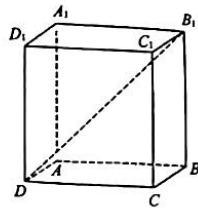
11. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AA_1=2, AD=1$, E 为 A_1B_1 的中点, 点 P 满足 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DB_1}$ ($0 < \lambda < 1$), 则

A. 若 M 为 A_1D 的中点, 则三棱锥 $P-BEM$ 体积为定值

B. 存在点 P 使得 $AP \perp BE$

C. 当 $\lambda = \frac{2}{3}$ 时, 平面 PBC 截长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面的面积为 $\sqrt{5}$

D. 若 Q 为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 外接球上一点, $\lambda = \frac{2}{3}$, 则 $QE + 3QP$ 的最小值为 $\sqrt{14}$



三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 从 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 中任取两个不同的数, 事件 A 为“取到的两个数的和为偶数”, 事件 B 为“取到的两个数均为偶数”, 则 $P(B|A) =$ _____.

13. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $b(1 + \cos A) = a(2 - \cos B)$, $b = c = 2$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 _____.

14. 已知函数 $f(x) = a \ln x - x$, 若不等式 $x^e \geq e^x + 2e^x f(x)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 _____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) $b_n = (-1)^n (a_n + n - 1)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} .

16. (15 分)

甲、乙两人进行乒乓球比赛, 比赛采用五局三胜制(一方先胜三局即获胜, 比赛结束), 每一局比赛中两人都要决出胜负, 不出现平局, 且甲获胜的概率为 p ($0 < p < 1$).

(1) 若 $p = \frac{2}{3}$, 求甲以 3:2 获胜的概率;

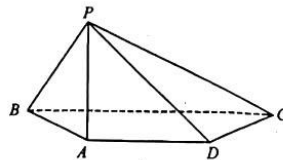
(2) 若 $p = \frac{1}{2}$, 求比赛结束时, 比赛局数 X 的分布列及数学期望.

17. (15分)

已知四棱锥 $P-ABCD$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为梯形, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD = 4$, $AB = DC = PA = 2$.

(1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAC ;

(2) 平面 PAB 与平面 PCD 的交线为 l , 求直线 l 与平面 PCB 夹角的正弦值.



18. (17分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+1)$.

(1) 讨论函数 $F(x) = ax - f(x)$ ($a \in \mathbf{R}$) 的单调性;

(2) 设函数 $g(x) = (x+1)f(\frac{1}{x}) - f(\frac{1}{x}+1)$.

(i) 求 $g(1) - g(-2)$ 的值;

(ii) 证明: 存在实数 m , 使得曲线 $y = g(x)$ 关于直线 $x = m$ 对称.

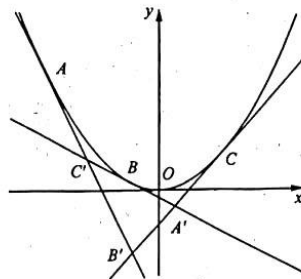
19. (17分)

已知抛物线 $W: x^2 = 4y$, A, B, C 是 W 上不同的三点, 过三点的三条切线分别两两交于点 A', B', C' , 则称三角形 $A'B'C'$ 为抛物线的外切三角形.

(1) 当点 C 的坐标为 $(2, 1)$, B 为坐标原点, 且 $BA = BC$ 时, 求点 B' 的坐标;

(2) 设外切三角形 $A'B'C'$ 的垂心为 H , 试判断 H 是否在定直线上, 若是, 求出该定直线; 若不是, 请说明理由;

(3) 证明: 三角形 ABC 与外切三角形 $A'B'C'$ 的面积之比为定值.



关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索