数　学

参考答案、解析、评分细则

1. 解析：根据题意：$(1+i)z=i\Leftrightarrow z=\dfrac{i}{1+i}=\dfrac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$，所以$|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故选 B.

2. 解析：根据题意：$A\cap B=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}y=x^2\\y=\sqrt{x}\end{cases}\right.\right\}=\{(0,0),(1,1)\}$，故选 C

3. 解析：根据题意，令$t=\alpha-\dfrac{\pi}{12}\Leftrightarrow\alpha=t+\dfrac{\pi}{12}$，可得$\sin t=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则$\cos(t+\dfrac{\pi}{2})=-\sin t=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，故选 A

4. 解析：对于 A，$y=\tan\dfrac{x}{4}$，则$T=\dfrac{\pi}{\frac{1}{4}}=4\pi$，对于 B，函数$y=\sin\dfrac{x}{2}$的最小正周期为$4\pi$；对于 C，函数$y=|\sin x|$最小正周期为$\pi$，所以$2\pi$也是它的一个周期，故 C 正确；对于 D，$y=\sin|x|$，可判断该函数为偶函数，根据图象该函数不是周期函数。故选 C.

5. 解析：根据题意：$S_n=2a_n-1$，$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，两式作差可得$a_n=2a_{n-1}$，当$n=1$时，$a_1=1$，所以数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为2的等比数列，所以$a_n=2^{n-1}$，$\dfrac{T_{12}}{T_4}=a_5\cdot a_6\ldots a_{12}=(a_8\cdot a_9)^4=(2^{15})^4=2^{60}$，所以$\log_2\dfrac{T_{12}}{T_4}=60$，故选 D.

6. 解析：对于 A，若两直线平行，则$a=\dfrac{1}{a}\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow a=\pm1$，所以“直线$ax-y+3=0$与直线$x-ay=0$互相平行”是“$a=-1$”的必要不充分条件，故 A 错误；对于 B，由直线$2\cos\alpha x-2y+3=0$，得$y=\cos\alpha\cdot x+\dfrac{3}{2}$，所以斜率$k=\cos\alpha\in[-1,1]$，设倾斜角为$\theta$，则$\tan\theta\in[-1,1]$，又$\theta\in[0,\pi)$，所以$\theta\in[0,\dfrac{\pi}{4}]\cup[\dfrac{3\pi}{4},\pi)$，故 B 不正确；对于 C，设直线$y-2=k(x-1)$，则$A(1-\dfrac{2}{k},0),B(0,2-k)$，所以$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}\times(2-k)\left(1-\dfrac{2}{k}\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(2+2-k-\dfrac{4}{k}\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(4+(-k)+\dfrac{4}{(-k)}\right)\geq4$，当且仅当$k=-2$时成立，所以，此时直线的方程为$y=-2x+4$，故 C 正确；对于 D，若直线$l:kx+y-k+1=0$，得：$l:(x-1)k+y+1=0$，所以直线恒过定点$C(1,-1)$，因为$k_{AC}=-\dfrac{3}{2}$，$k_{BC}=\dfrac{3}{2}$，结合图象可知直线的斜率$k\in\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2}\ +\infty\right)$，故 D 不正确，故选：C

7. 解析：$a+2\ln a=-b+2+2\ln(2-b)\Leftrightarrow a+2\ln a=(2-b)+2\ln(2-b)$，设函数$f(x)=x+2\ln x$，分析可得函数$f(x)$单调递增，所以可得$a=2-b\Leftrightarrow a+b=2$，

$2=a+b\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow ab\le 1,\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2,$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)(a+b)=\dfrac{1}{2}\left(1+4+\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b}\right)\ge\dfrac{1}{2}\times\left(5\times 2\sqrt{4}\right)=\dfrac{9}{2}$，故选 D.

8. 解析：根据题意：

$f(x)=\cos^4(\omega x+\varphi)-\sin^4(\omega x+\varphi)=\left[\cos^2(\omega x+\varphi)-\sin^2(\omega x+\varphi)\right]\left[\cos^2(\omega x+\varphi)+\sin^2(\omega x+\varphi)\right]$

$\cos^2(\omega x+\varphi)-\sin^2(\omega x+\varphi)=\cos(2\omega x+2\varphi)$

由图可知 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow T=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 2\omega=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4\Rightarrow\omega=2$，$f(x)=\cos(4x+2\varphi)$

又 $4\times\dfrac{\pi}{6}+2\varphi=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in z\Rightarrow\varphi=-\dfrac{7\pi}{12}+k\pi,k\in z$，又 $0<\varphi<\pi$，所以 $k=1,\varphi=\dfrac{5\pi}{12}$，所以 $f(x)=\cos\left(4x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$，$g(x)=4\left|\cos\left(4x+\dfrac{5\pi}{6}\right)\right|-\sqrt{4x-\dfrac{\pi}{6}}$，令 $t=4x-\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\dfrac{t+\frac{\pi}{6}}{4}$，

所以 x 与 t 一一对应，故只需看 $4|\cos t|=\sqrt{t}$ 的根的个数即可，根据图象不难看出，两个函数共有 11 个交点，故选 C.

9. 解析：选项 A：若 $a//\alpha,b\subset\alpha$，不能判断直线 a,b 的位置关系，故 A 错误；

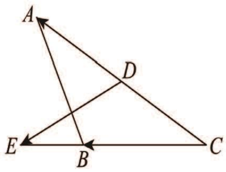
选项 B：若 $\alpha//\beta,a\subset\alpha,b\subset\beta$，不能判断直线 a,b 的位置关系，故 B 错误；

选项 C：根据面面垂直的性质定理可得 C 正确；

选项 D：若 $\alpha\perp\beta$，$a\subset\alpha,b\subset\beta$，不能判断直线 a,b 的位置关系，故 D 错误；

故选：ABD

10. 解析：如图所示，



$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$，故 A 正确；

$\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BE}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，故 B 错误；

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}^2\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{BD}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，所以 $BD\perp AC$，

又因为点 D 为 AC 的中点，所以 AB=BC，故 C 正确；

若 $AB\perp DE$，设 $\overrightarrow{CA}=\vec{a},\overrightarrow{CB}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=0=\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}\right)=-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{a}^2+\dfrac{3}{2}\vec{b}^2$，

设 $|\vec{a}|=m,|\vec{b}|=n,\angle ACB=\theta\left(m、n>0,\theta\in(0,\pi)\right)$，

则 $4mn\cos\theta=m^2+3n^2\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{m}{4n}+\dfrac{3n}{4m}\ge 2\sqrt{\dfrac{m}{4n}\cdot\dfrac{3n}{4m}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当 $m=\sqrt{3}n$ 时取得等号，

所以 $\angle ACB$ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{6}$，故 D 正确.

故选 ACD

11. 解析：因为 $f\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-b=b-f\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$，所以函数 $f(x)$ 关于 $\left(\dfrac{\pi}{3},b\right)$ 中心对称，因为

$f\left(x\right)=f\left(\frac{5\pi}{3}-x\right)$，所以函数 $f\left(x\right)$ 关于 $x=\frac{5\pi}{6}$ 轴对称，所以函数 $f\left(x\right)$ 为周期函数，其周期为 $T=4\times\left|\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right|=2\pi$，故 $f(x)=f(\frac{5}{3}\pi-x)=f\left(-\frac{\pi}{3}-x\right)$，所以 A 正确；由于函数 $f\left(x\right)$ 关于 $\left(\frac{\pi}{3},b\right)$ 中心对称，所以 $g\left(x\right)$ 关于 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，所以 $g\left(x\right)=g\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$，选项 B 正确；由于没有明确的解析式，所以 C 错误；因为函数 $f\left(x\right)$ 关于 $\left(\frac{\pi}{3},b\right)$ 中心对称，所以函数 $h\left(x\right)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-b$ 为奇函数，函数 $h\left(x\right)$ 的最大值与最小值之和为 0，所以 $f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最大值与最小值之和为 $2b$，所以函数 $f\left(x\right)$ 的最大值与最小值之和为 $2b$，$2b=2\Rightarrow b=1$，选项 D 正确；故选 ABD

12. 解析：对于选项 A，当 $P(-1,0)$，AB 为直径时，$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}|PM||y_A-y_B|$（其中 y_A 为点 A 的纵坐标），所以当点 A 为（2,1）时，三角形 PAB 的面积最大，$(S_{\Delta PAB})_{\max}=\frac{1}{2}|PM|\times 2r=3$，所以 A 正确；对于选项 B，设 $\angle APM=\theta$，则 $\angle BAM=\angle APM=\theta$，所以 $|AB|=2\cos\theta$，θ 越大，$|AB|$ 越小，当点 P 在（-1,0）处时，θ 最大，此时 $\sin\theta=\frac{1}{3},\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3},|AB|=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，即 $|AB|_{\min}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，选项 B 正确；对于选项 C，当点 P 在（$-1$,0）处时，且 PA，PB 为切线时，$\angle APB$ 最大，此时 $\sin\angle APM=\frac{1}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\angle APM<45°,\angle APB=2\angle APM<90°$，所以不存在符合的点；故选项 C 不正确；对于 D 选项，设 AB 的中点 D，则 $MD\perp AB$，$MD=\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}=\frac{1}{2}$，所以点 D 在以 M 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径的圆上，$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|=2\left|\overrightarrow{PD}\right|$，设小圆半径为 r_1，则 $\left|\overrightarrow{PD}\right|_{\max}=\left|\overrightarrow{PM}\right|+r_1=\sqrt{13}+\frac{1}{2}$，则 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$ 的最大值为 $2\sqrt{13}+1$，D 正确．故选 ABD

13. 解析： $y=\ln x-b+3\Leftrightarrow y'=\frac{1}{x}=\frac{1}{e}\Leftrightarrow x_0=e$，所以切点为 $\left(e,4-b\right)$，切点在直线 $y=\frac{1}{e}x+2a+1$ 上，可得 $2a+b=2$

14. 解析：因为函数 $f(x)$ 是定义在 $[-m-4,2m+1]$ 上的奇函数，所以有 $(2m+1)-(m+4)=0\Leftrightarrow m=3$，所以 $f(3)=-f(-3)=-\left(\log_3 3+2\right)=-3$．

15. 解析：根据题意：底面为边长为 3 的等边三角形，点 M 为底面的中心，过点 M 作底面的垂线 l_1，与平面 PAB 平行，点 N 为 PAB 的外心，过点 N 作平面 PAB 的垂线 l_2 与 l_1 交于点 O 为该几何体外接球的球心，所以该外接球的半径 R，三角形 PAB 的外接圆半径 r，$2r=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow r=\sqrt{3}$，$R^2=r^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\Leftrightarrow R^2=\frac{15}{4}$，所以该几何体的外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=15\pi$．

16. 解析：根据题意，分析可得，设 $a_1=m$，当 n=1 时，$a_3=m+2$，当 $n=3$ 时，$a_5=m+10$，当 $n=5$ 时，$a_7=m+24$，$a_9=m+44$，$a_{11}=m+70$，$a_{13}=m+102$，$a_{15}=m+140$，当 $n=2$ 时，$a_2+a_4=5$，当 $n=6$ 时，$a_6+a_8=17$，$a_{10}+a_{12}=29$，$a_{14}+a_{16}=41$

所以该数列的前16项和为$8m+392+92=8m+392+92=8m+484=508 \Leftrightarrow m=3$，故$a_3=5$

17. 解析：（1）设数列$\{a_n\}$的首项为a_1，数列$\{b_n\}$的公差为d，因为$a_2=b_5,a_3=b_{14}$，可得

$3a_1=1+4d,9a_1=1+13d \Leftrightarrow a_1=3,d=2$，（3分）所以$a_n=3^n,b_n=2n-1$（4分）

（2）$c_n=3^n+(-1)^n(2n-1)$，（5分）所以

$S_{2n}=3^1+3^2+...+3^{2n}+(-1)\times1+1\times3+(-1)\times5+1\times7+...(-1)\times(4n-3)+1\times(4n-1)$（6分）

$S_{2n}=\dfrac{3(1-3^{2n})}{1-3}+2n=\dfrac{1}{2}\times3^{2n+1}+2n-\dfrac{3}{2}$（10分）

18. 解析：（1）根据题意：$f(x)=x^2+2x-\ln x$，$f(1)=3$，（1分）$f'(x)=2x+2-\dfrac{1}{x},f'(1)=3$（3分），所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$(y-3)=3(x-1) \Leftrightarrow y=3x$（5分）

（2）根据题意：$f(x)-x^2>2x-e^{x-1}-m \Leftrightarrow e^{x-1}-\ln x>-m$，（6分）令$h(x)=e^{x-1}-\ln x$，$h'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$，函数$h'(x)$单调递增，$h'(1)=e^0-\dfrac{1}{1}=0$，（8分）所以，当$x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$，函数$h(x)$单调递减，当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$，函数$h(x)$单调递增，（10分）所以当$x=1$时，函数$h(x)$取得最小值为$h(1)=1$，所以可得$1>-m \Leftrightarrow m>-1$（12分）

19. 解析：（1）向量$\vec{m}=(b,c-2a)$与向量$\vec{n}=(\cos C,\cos B)$垂直，则$b\cos C+(c-2a).\cos B=0$（1分）由正弦定理得

$\sin B\cos C+\sin C\cos B-2\sin A\cos B=0,$（2分）则$\sin(B+C)-2\sin A\cos B=0,\therefore \sin A=2\sin A\cos B$

$\because \sin A>0,\therefore \cos B=\dfrac{1}{2},\because B\in(0,\pi),\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$（4分）

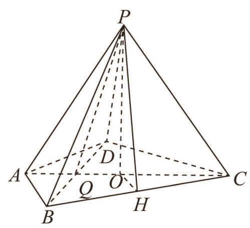
$\therefore b^2=a^2+c^2-ac,\because a=3c,\therefore b^2=7c^2,\therefore \dfrac{b}{c}=\sqrt{7}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$;（6分）

（2）根据题意，因为BD为角B的内角平分线，所以

$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta CBD} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}ac=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}c+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}a \Leftrightarrow ac=a+c \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=1$，（8分）根据余弦定理可得$b^2=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac\ge(a+c)^2-3\times\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}(a+c)^2$，（9分）

又$(a+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)=2+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\ge4$，（11分）所以$b^2\ge\dfrac{1}{4}(a+c)^2\ge4$,(当且仅当$a=c=2$取"=") $\Leftrightarrow b\ge2$，所以b的最小值为2.（12分）

20. 解析：（1）如图所示，$BC=CD,\angle ABC=\angle ADC=90°,AC=AC$，所以$Rt\Delta ABC\cong Rt\Delta ADC$，所以$AB=AD$，设$AC\cap BD=Q$，连接$PQ$，则$\Delta QBC\cong\Delta QDC$，点$Q$为$BD$的中点，又$PB=PD$，所以$PQ\perp BD$，又$\angle DQC=\angle BQC$，且$\angle DQC+\angle BQC=180°$，所以$AC\perp BD$，又$AC\cap PQ=Q$，所以$BD\perp$平面$PAC$；（4分）



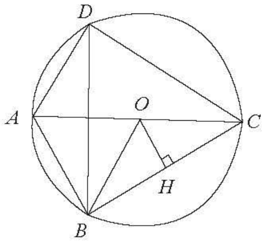
（2）由（1）可知，平面$ABCD\perp$平面PAC，取AC的中点为O，连接PO，则$PO\perp AC$，$PO\perp$平面$ABCD$，（6分）过点O作$OH\perp BC$，垂足为H，连接PH，则$PH\perp BC$，$\angle PHO$为二面角$P-BC-A$的平面角，（8分）因为四棱锥$P-ABCD$的体积为

$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABCD}\times|PO|=\frac{1}{3}\times|AB|\times|BC|\times|PO|=\frac{1}{3}\times 2\times|AB|\times\sqrt{PH^2-OH^2}$

$=\frac{2}{3}\times|AB|\times\sqrt{3-\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}\times\sqrt{\frac{|AB|^2}{4}\times\left(3-\frac{|AB|^2}{4}\right)}\le\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=2$，当且仅当

$\frac{|AB|^2}{4}=3-\frac{|AB|^2}{4}\Leftrightarrow|AB|=\sqrt{6}$，（10分）体积最大，此时

$|OH|=\frac{\sqrt{6}}{2},|OP|=\frac{\sqrt{6}}{2}$，在 $Rt\Delta POH$ 中，



$\tan\angle PHO=\frac{|OP|}{|OH|}=1,\angle PHO=45°$，所以二面角 $P-BC-A$ 的大小为 $45°$（12分）

21. 解析： 根据题意：（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=(x-1)e^x-ex(x>0)$，$f'(x)=xe^x-e$，（1分）$f''(x)=(x+1)e^x>0$，所以 $f'(x)=xe^x-e$ 单调递增，又 $f'(1)=0$，所以函数 $f(x)$，在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，（3分）故 $f(x)_{\min}=f(1)=-e$．（4分）

（2）根据题意：$f'(x)=xe^x-a\ln x-e,f''(x)=(x+1)e^x-\frac{a}{x}=\frac{x(x+1)e^x-a}{x}$

当 $a\le0$ 时，$f''(x)>0$，可得 $f'(x)$ 为单调递增函数，又 $f'(1)=0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 只有一个极值点；（6分）

当 $a>0$ 时，$f''(x)=(x+1)e^x-\frac{a}{x}=\frac{x(x+1)e^x-a}{x}$，令

$g(x)=x(x+1)e^x-a,g'(x)=(x^2+3x+1)e^x$，可见 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 是单调递增函数，又 $g(0)=-a<0,g(a)=a(a+1)e^a-a>0$，所以存在 $x_0\in(0,a)$，使得

$g(x_0)=x_0(x_0+1)e^{x_0}-a=0\Leftrightarrow a=x_0(x_0+1)e^{x_0}$，所以函数 $f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $f'(x)$ 的最小值为

$f'(x_0)=x_0e^{x_0}-a\ln x_0-e=x_0e^{x_0}-x_0(x_0+1)e^{x_0}\ln x_0-e$，

令 $h(x)=xe^x-x(x+1)e^x\ln x-e$，

$h'(x)=(x+1)e^x-(x^2+3x+1)e^x\ln x-(1+x)e^x=-(x^2+3x+1)e^x\ln x$

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以

$h(x)\le h(1)=0\Leftrightarrow h(x_0)\le0\Leftrightarrow f'(x)_{\min}=f'(x_0)\le0$，（9分）

因为 $a>0$，所以 $f'(x)=xe^x-a\ln x-e$，当 $x\to0^+,f'(x)>0,x\to+\infty,f'(x)>0,$（10分）

当 $x_0=1\Leftrightarrow a=2e$，分析可得，此时函数 $f(x)$ 没有极值点；

当 $x_0\ne1\Leftrightarrow a\in(0,2e),(2e,+\infty)$，分析可得，此时函数 $f(x)$ 有两个极值点；

总之，当 $a=2e$ 时，函数 $f(x)$ 无极值点；，当 $a\le0$ 时，函数 $f(x)$ 有一个极值点；当 $a\in(0,2e),(2e,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 有两个极值点；（12分）

22. 解析：（1）根据题意，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow a=\sqrt{2}c\Leftrightarrow a^2=2c^2\Leftrightarrow b^2=c^2$，（2分）又点 $A(2,1)$ 在椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{4}{2c^2}+\frac{1}{c^2}=1\Leftrightarrow c^2=3$，所以 $a^2=6,b^2=3$，可得椭圆 M

的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$（4 分）

（2）根据题意：设点$B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，当$x_1=x_2$时，

则$B(x_1,y_1),C(x_1,-y_1)$，又$A(2,1)$，由$AB\perp AC$得$(x_1-2)(x_1-2)+(y_1-1)=0$，得$y_1^2=x_1^2-4x_1+5$，

又$\frac{x_1^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$，联系得：$x_1=\frac{2}{3}$，或$x_1=2$（舍去），则$B\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right),C\left(\frac{2}{3},-\frac{5}{3}\right)$（5 分）.

当$x_1\neq x_2$时设直线 BC 为$l:y=kx+m$，联立

$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$，可得$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}\\ x_1x_2=\frac{2m^2-6}{1+2k^2}\end{cases}$，（6 分）因为$AB\perp AC$，可得：

$\frac{y_1-1}{x_1-2}\times\frac{y_2-1}{x_2-2}=-1\Leftrightarrow y_1y_2-(y_1+y_2)+1=-x_1x_2+2(x_1+x_2)-4$，因为$y_1=kx_1+m,y_2=kx_2+m$，代入

可得：$(k^2+1)x_1x_2+(km-k-2)(x_1+x_2)+m^2-2m+5=0$，（8 分）代入韦达定理可得：

$(k^2+1)\times\frac{2m^2-6}{1+2k^2}+(km-k-2)\times\frac{-4km}{1+2k^2}+m^2-2m+5=0$，整理可得：$4k^2+3m^2+8km-2m-1=0$

$(2k+3m+1)(2k+m-1)=0$，可得：$m=-\frac{2k+1}{3}$或$m=-2k+1$，代入直线$l:y=kx+m$可得：

$l:y=kx-\frac{2k}{3}-\frac{1}{3}$，该直线恒过点$\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$，或者$l:y=kx-2k+1$，该直线恒过点$(2,1)$（与题意不符），

所以直线l恒过定点$\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$，（10 分）设点$D(x_0,y_0)$，直线$BD$的方程为$\frac{x_1x}{6}+\frac{y_1y}{3}=1$，直线$CD$的方程为

$\frac{x_2x}{6}+\frac{y_2y}{3}=1$，点$D$分别在直线$BD$，$CD$上，所以$\begin{cases}\frac{x_1x_0}{6}+\frac{y_1y_0}{3}=1\\ \frac{x_2x_0}{6}+\frac{y_2y_0}{3}=1\end{cases}$，可得直线$BC$为$\frac{x_0x}{6}+\frac{y_0y}{3}=1$，

又因为直线 BD 恒过点$\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$，所以$\frac{x_0\times\frac{2}{3}}{6}+\frac{y_0\times\left(-\frac{1}{3}\right)}{3}=1\Leftrightarrow x_0-y_0=9$，所以点 D 的轨迹为

$x-y=9$，可得 AD 的最小值为点 A 到点 D 轨迹的距离，可得$4\sqrt{2}$.（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。