

华附、省实、广雅、深中 2024 届高三四校联考

数学

命题学校：广东实验中学 定稿人：杨晋鹏 张淑华

本试卷分选择题和非选择题两部分，共 4 页，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名、考号填写在答题卷上。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卷上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案；不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卷各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将答题卷收回。

一. 单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知全集 $U = R$ ，集合 A, B 满足 $A \subseteq (A \cap B)$ ，则下列关系一定正确的是()

- A. $A = B$ B. $B \subseteq A$ C. $(C_U A) \cap B = \emptyset$ D. $A \cap (C_U B) = \emptyset$

2. 已知复数 z 满足 $(1+i)\bar{z} = 1-i$ ，则 $z^{2024} =$ ()

- A. i B. -1 C. 1 D. $-i$

3. 直线 $x + 2y + 3 = 0$ 关于直线 $y = -x$ 对称的直线方程是()

- A. $x + 2y - 3 = 0$ B. $2x + y - 3 = 0$ C. $x - 2y - 3 = 0$ D. $2x + 3y + 3 = 0$

4. 已知向量 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影向量的模为 $\sqrt{2}$ ，向量 \vec{b} 在 \vec{a} 方向上的投影向量的模为 1，且

$(\vec{a} + \vec{b}) \perp (2\vec{a} - 3\vec{b})$ ，则向量 \vec{a} 与向量 \vec{b} 的夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

5. 若椭圆 $\Gamma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，则双曲线 $\Gamma_2: \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

6. 在平直的铁轨上停着一辆高铁列车，列车与铁轨上表面接触的车轮半径为 R ，且某个车轮上的点 P 刚好与铁轨的上表面接触，若该列车行驶了距离 S ，则此时 P 到铁轨上表面的距离为 ()

- A. $R(1 + \cos \frac{S}{R})$ B. $R(1 - \cos \frac{S}{R})$ C. $2R \sin \frac{S}{R}$ D. $R \sin \frac{S}{R}$

7. 若 $(1-c)e^a = (1-c)\ln b = 1$ 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $c \leq a < b$ B. $c < a < b$ C. $c < b < a$ D. $b < a \leq c$

8. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 且 $\frac{1}{a_n} = \frac{8a_{n-1} + 8\sqrt{a_{n-1}} + n}{2a_{n-1}}$, ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+$), 若 $a_1 = 1$, 则

- A. $\frac{5}{2} < S_{2024} < 3$ B. $2 < S_{2024} < \frac{5}{2}$ C. $\frac{3}{2} < S_{2024} < 2$ D. $1 < S_{2024} < \frac{3}{2}$

二. 多项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多个选项是符合题目要求的, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 下列结论正确的是()

- A. 若 $a > b, c > d$, 则 $ac^2 > bd^2$
 B. 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$
 C. “ $ab > 1$ ” 是 “ $a > 1, b > 1$ ” 成立的充分不必要条件
 D. 若 $a > b > 1$, 则 $\log_a b < \log_{a+1}(b+1)$

10. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$, 圆 $C_2: (x-3)^2 + (y+4)^2 = r^2$ ($r > 0$), P, Q 分别是圆 C_1 与圆 C_2 上的点, 则()

- A. 若圆 C_1 与圆 C_2 无公共点, 则 $0 < r < 4$
 B. 当 $r=5$ 时, 两圆公共弦所在直线方程为 $6x - 8y - 1 = 0$
 C. 当 $r=2$ 时, 则 PQ 斜率的最大值为 $-\frac{7}{24}$
 D. 当 $r=3$ 时, 过 P 点作圆 C_2 两条切线, 切点分别为 A, B , 则 $\angle APB$ 不可能等于 $\frac{\pi}{2}$

11. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$, 满足 $f(x) = kx + b$ 有三个不同的实数根 x_1, x_2, x_3 , 则()

- A. 若 $k = 0$, 则实数 b 的取值范围是 $-4 < b < 0$
 B. 过 y 轴正半轴上任意一点仅有一条与函数 $y = f(x) - 1$ 相切的直线
 C. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = k$
 D. 若 x_1, x_2, x_3 成等差数列, 则 $k + b = -2$

12. 已知正四面体 $O-ABC$ 的棱长为 3, 下列说法正确的是()

- A. 若点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, 且 $x + y + z = 1$, 则 $|\overrightarrow{OP}|$ 的最小值为 $\sqrt{6}$
 B. 在正四面体 $O-ABC$ 的内部有一个可以任意转动的正四面体, 则此四面体体积可能为 $\frac{\sqrt{2}}{10}$
 C. 若正四面体 $O-ABC$ 的四个顶点分别在四个互相平行的平面内, 且每相邻平行平面间的距离均相等, 则此距离为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
 D. 点 Q 在 $\triangle ABC$ 所在平面内且 $|QO| = 2|QA|$, 则 Q 点轨迹的长度为 $\frac{2\sqrt{30}}{3}\pi$

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ，则此双曲线的渐近线方程为_____.

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbb{N}^*)$ ， $a_4 = 4$ ， $a_7 = 10$ ，则 S_n 的最小值为_____.

15. 已知函数 $f(x) = \sin^2(\omega x - \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$ 的最小正周期为 2π ，且 $f(x)$ 在 $[0, m]$ 上单调递减，在 $[2m, \frac{5\pi}{3}]$ 上单调递增，则实数 m 的取值范围是_____.

16. 在同一平面直角坐标系中， M 、 N 分别是函数 $f(x) = -\sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ 和函数 $g(x) = \ln(ax) - axe^x$ 图象上的动点，若对任意 $a > 0$ ，有 $|MN| \geq m$ 恒成立，则实数 m 的最大值为_____.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. (本小题10分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_1 + \frac{S_2}{2} + \dots + \frac{S_n}{n} = n \cdot 2^n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题12分)

在 9 道试题中有 4 道代数题和 5 道几何题，每次从中随机抽出 1 道题，抽出的题不再放回.

(1) 求在第一次抽到几何题的条件下第二次抽到代数题的概率;

(2) 若抽 4 次，抽到 X 道代数题，求随机变量 X 的分布列和期望.

19. (本小题12分)

已知函数 $f(x) = axe^x (a \neq 0)$ ， $g(x) = -x^2$.

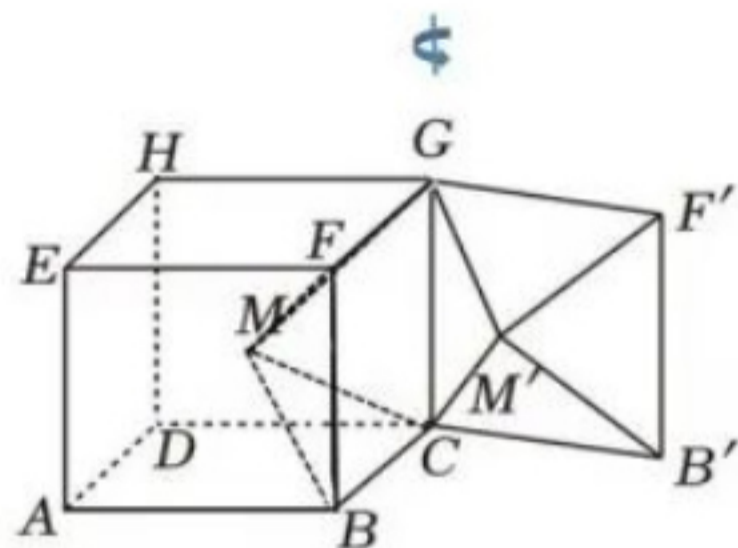
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $x > 0$ 时， $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公切线，求实数 a 的取值范围.

20. (本小题12分)

如图, 在棱长为2的正方体 $ABCD - EFGH$ 中, 点 M 是正方体的中心, 将四棱锥 $M - BCGF$ 绕直线 CG 逆时针旋转 α ($0 < \alpha < \pi$) 后, 得到四棱锥 $M' - B'CGF'$.

- (1) 若 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 求证: 平面 $MBF \perp$ 平面 $M'B'F'$;
 (2) 是否存在 α , 使得直线 $MF' \perp$ 平面 MBC , 若存在, 求出 α 的值; 若不存在, 请说明理由.



21. (本小题12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , AB 边上的高设为 h , 且 $a+b=c+h$.

- (1) 若 $c=3h$, 求 $\tan C$ 的值;
 (2) 求 $\cos C$ 的取值范围.

22. (本小题12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两焦点分别为 F_1, F_2 , C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 椭圆上有三点 Q, R, S , 直线 QR, QS 分别过 F_1, F_2 , $\triangle QRF_2$ 的周长为 8.

- (1) 求 C 的方程;
 (2) 设点 $Q(x_0, y_0)$, 求 $\triangle QRS$ 面积 $S_{\triangle QRS}$ 的表达式 (用 y_0 表示).