2023届高三年级11月份大联考

数学试题

本试卷共4页，22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知复数 z 满足 $z(2-i)=i$，则 $|5z-i|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{2}$

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid \lg(x+2)\leqslant 0\}$，$B=\{y\mid y=\sqrt{x}-\sqrt{2}\}$，$a\in A\cap B$，则 a 的值可以是

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

3. 命题"$\forall x\in[-2,-1]$，$x^2-a>2$"为假命题的一个充分不必要条件是

A. $a\leqslant 1$　　B. a [illegible] 2　　C. $a\geqslant 1$　　D. $a\leqslant 2$

4. "太空教师"的神舟十三号航天员翟志刚、王亚平、叶光富出现在画面中，"天宫课堂"第一课在中国空间站正式开讲．此次太空授课通过为同学们呈现多种精彩的实验和现象，激发了同学们的好奇心，促使他们去观察这些现象，进而去思考、去探索，把科学思维的种子种进心里．某校为了解同学们对"天宫课堂"这种授课模式的兴趣，决定利用分层抽样的方法从高二、高三学生中选取90人进行调查，已知该校高二年级学生有[illegible]800人，高三年级学生有1 500人，则抽取的学生中，高三年级有

A. 20人　　B. 30人　　C. 40人　　D. 50人

5. 函数 $f(x)=x\ln(x+2)$ 的图象在点 $(-1,0)$ 处的切线与直线 $(a-2)x+y-2=0$ 垂直，则实数 a 的值为

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

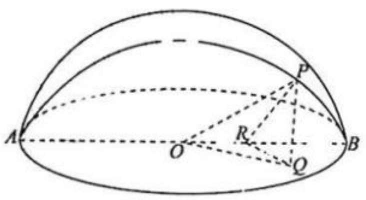
6. 某海外实验室在研究某种人类细菌的过程中发现，细菌数量 N(单位)与该人类细菌被植入培养的时间 t(单位：小时)近似满足函数关系 $Y(t)=N_0e^{-\frac{t}{24}}$，其中 N_0 为初始细菌含量．当时间 $t=12$(单位：小时)，该细菌数量为 $\frac{24\sqrt{e}}{e}$(单位)，则 $Y(72)=$

A. $12e^{-3}$　　B. $24e^{-3}$　　C. $36e^{-3}$　　D. $38e^{-3}$

7. 若正实数 a,b,c 满足 $a=e^{\sqrt{0.1}}$，$\log_{0.5}b=\frac{1}{5}$，$c^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$，则

A. $c^a>b^a$　　B. $\log_c a<\log_b a$　　C. $\log_a b>\log_b c$　　D. $c^{a-1}<b^{c-1}$

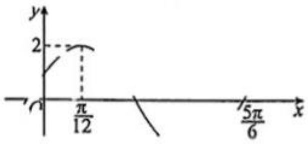
8. 如图，AB 是半球的直径，O 为球心，$AB=2$，P 为此半球大圆弧上的任意一点(异于 A,B)，P 在水平大圆面 AOB 内的射影为 Q，过 Q 作 $QR\perp AB$ 于 R，连接 PR，OP，若二面角 $P-AB-Q$ 为 $\frac{\pi}{3}$，则三棱锥 $P-OQR$ 体积的最大值为



A. $\frac{\sqrt{3}}{64}$　　B. $\frac{1}{64}$　　C. $\frac{1}{36}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{96}$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象如图所示，则



A. 函数解析式 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

B. 将函数 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度可得函数 $f(x)$ 的图象

C. 直线 $x=-\frac{11}{12}\pi$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴

D. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上的最大值为 2

10. 给出下列命题，其中正确的命题是

A. 已知 $P(B|A)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=\frac{1}{8}$，则 $P(A)=\frac{1}{4}$

B. 随机变量 $X\sim N(2,3^2)$，若 $X=\frac{1}{3}Y-2$，则 $E(Y)=12$，$D(Y)=81$

C. 以模型 $y=(c-1)e^{2kx}$ 拟合一组数据时，为了求出回归方程，设 $z=\ln y$，将其变换后得到线性方程 $z=\frac{1}{2}x+2$，则 c，k 的值分别是 e^2-1 和 0.2

D. 直线 $l_1:(2-a)x+3y+2a=0$，$l_2:x-ay-6=0$，若 $l_1/\!/l_2$，则 $a=-1$

11. 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ 为偶函数，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，则

A. $f(0)=0$

B. $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减

C. $f(2\pi+x)$ 为奇函数

D. $f\left(\frac{101\pi}{2}\right)=1$

12. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，短轴长为 $2\sqrt{3}$，P 为 C 上任意一点，F_1、F_2 分别为 C 的左、右焦点，过点 F_1 的直线 l 交椭圆于 A，B 两点，则下列说法正确的是

A. 存在点 P，使得 PF_1 的长度为 $\frac{1}{2}$

B. $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$

C. C 上存在 4 个不同的点 P，使得 $\triangle PF_1F_2$ 是直角三角形

D. $\triangle PF_1F_2$ 内切圆半径的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

14. $(x-2y)(2x-y)^6$ 的展开式中，含 x^4y^3 项的系数为________.

15. 某石油勘探队在某海湾发现两口大型油气井，海岸线近似于双曲线 $C:\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ 的右支，现测得两口油气井的坐标位置分别为 $F(10,0)$，$Q(30,9)$，为了运输方便，计划在海岸线上建设一个港口，则港口到两油气井距离之和的最小值为________.

16. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，斜边为 AB，点 D 在边 BC 上，设 $\angle ADC=\alpha$，$\angle BAD=\beta$，若 $\sin B=\frac{\sin(\alpha-B)}{\sin\alpha}$，则 $\frac{AB^2+AD^2}{AD\cdot AB}$ 用 β 表示为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

设数列$\{a_n\}$满足：对任意正整数 n，有 $a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}=n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{na_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.（本小题满分 12 分）

请从下面三个条件中任选一个，补充在下面的横线上，并解答.

①$(a+c)(\sin A-\sin C)+(b-a)\sin B=0$；②$2\sqrt{3}\sin C\cos C=1+2\cos^2 C$；

③$2\sin B-\sin A=2\sin C\cos A$. 在$\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c 若______.

(1)求角 C；

(2)若 $c=4$，求$\triangle ABC$ 周长的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

某市宣传部门开展了线上新冠肺炎世界防控现状及防控知识竞赛，现从全市的参与者中随机抽取了 1 000 名幸运者的成绩进行分析，把他们的得分（满分 100 分）分成以下 7 组：$[30,40)$，$[40,50)$，$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$，统计得各组的频率之比为 $1:6:8:10:9:4:2$. 同一组数据用该区间中点值代替.

(1)求这 1 000 名幸运者成绩的第 75 百分位数和平均值 μ（结果保留整数）；

(2)若此次知识竞赛得分 $X\sim N(\mu,14^2)$，为感谢市民的积极参与，对参与者制定如下奖励方案：得分不超过 79 分的可获得 1 次抽奖机会，得分超过 79 分不超过 93 分的可获得 2 次抽奖机会，超过 93 分的有 3 次抽奖机会，试估计任意一名幸运者获得抽奖次数的数学期望.

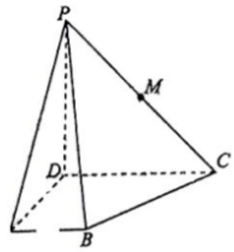
参考数据：$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.9545$，$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)\approx0.9973$.

20.（本小题满分 12 分）

已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=CD=2$，$AD=AB=1$，$AB\perp DA$，AB [illegible].

(1)求证：平面 $PAD\perp$ 平面 PCD；

(2)设 M 是棱 PC 上的点，若二面角 $M-BD-A$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，试求直线 BC 与平面 BDM 所成角的正弦值.



21.（本小题满分 12 分）

已知 O 为坐标原点，$Q(m,2)$ 位于抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上，且到抛物线的准线的距离为 2.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)已知点 $A(-2,4)$，过抛物线焦点的直线 l 交 C 于 M，N 两点，当 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 取最小值时，求 $\triangle AMN$ 的面积.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^2-a\ln x$，$g(x)=x^2-\frac{e^x}{x}$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)证明：当 $a\in\left(0,\frac{e^2}{2}\right]$ 时，$g(x)<f(x)$ 恒成立.

2023届高三年级11月份大联考

数学参考答案及评分细则

一、单选题

1. A　【解析】根据已知条件可知：$z(2-\mathrm{i})=\mathrm{i}$，故有：$z=\frac{\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{-1+2\mathrm{i}}{5}$，所以 $|5z-\mathrm{i}|=|-1+\mathrm{i}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$. 故选 A.

2. B　【解析】$\because \lg(x+2)\leqslant 0$，$\therefore 0<x+2\leqslant 1$，$\therefore -2<x\leqslant -1$，$\therefore A=\{x\mid -2<x\leqslant -1\}$，$B=\{y\mid y=\sqrt{x}-\sqrt{2}\}=\{y\mid y\geqslant -\sqrt{2}\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant -1\}$，因为 $a\in A\cap B$，结合选项可得：$-1\in A\cap B$. 故选 B.

3. C　【解析】由命题"$\forall x\in[-2,-1]$，$x^2-a>2$"为假命题，得该命题的否定："$\exists x\in[-2,-1]$，$x^2-a\leqslant 2$"为真命题，得 $a+2\geqslant (x^2)_{\min}=1$，所以 $a\geqslant -1$，所以 $a\geqslant 1$ 为该命题的一个充分不必要条件. 故选 C.

4. D　【解析】由题意可知该校高二年级学生有 1 200 人，高三年级学生有 1 500 人，则高二年级与高三年级的学生人数比为 4∶5，根据分层抽样的特征可知，抽取的学生中，高三年级有 $90\times\frac{5}{4+5}=50$ 人. 故选 D.

5. C　【解析】对函数 $f(x)=x\ln(x+2)$ 求导，得：$f'(x)=\ln(x+2)+\frac{x}{x+2}$，所以 $f'(-1)=\ln 1+\frac{-1}{1}=-1$，即函数 $f(x)=x\ln(x+2)$ 的图象在点 $(-1,0)$ 处的切线斜率为 -1，因为切线与直线 $(a-2)x+y-2=0$ 垂直，所以 $(2-a)\times(-1)=-1$，$\therefore a=1$. 故选 C.

6. B　【解析】因为 $Y(t)=N_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{24}}$，$t=12$ 时，该细菌数量为 $\frac{24\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}$，故有：$Y(12)=\mathrm{e}^{-\frac{12}{24}}\cdot N_0=\frac{24\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}=24\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，所以 $N_0=24$，故 $Y(72)=24\times\mathrm{e}^{-\frac{72}{24}}=24\mathrm{e}^{-3}$. 故选 B.

7. D　【解析】$\because a=\mathrm{e}^{\sqrt{0.1}}>\mathrm{e}^0=1$，$\therefore a>1$，$\because \log_{0.5}1=0<\log_{0.5}b=\frac{1}{5}<1=\log_{0.5}0.5$，$\therefore 0.5<b<1$，$\because c^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$，$\therefore c=\frac{1}{8}$，$\therefore 0<c<0.4<b<1<a$，$\therefore c^a<b^a$，$\log_c a>\log_b a$，$\log_a b<0<\log_b c$，$\therefore$ A，B，C 项错误；$\because a-1>0$，$c-1<0$，$\therefore 0<c^{a-1}<1<b^{c-1}$，D 项正确. 故选 D.

8. C　【解析】$\because PQ\perp$ 平面 ABQ，$\therefore PQ\perp AB$，$\because QR\perp AB$，$PQ\cap QR=Q$，$\therefore AB\perp$ 平面 PQR，$\therefore AB\perp PR$，$\therefore \angle PRQ$ 为二面角 $P-AB-Q$ 的平面角，即 $\angle PRQ=\frac{\pi}{3}$，设 $PR=2a$，$PQ=\sqrt{3}a$，$QR=a$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OPQ$ 中，$OP=1$，$OQ=\sqrt{1-3a^2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ORQ$ 中，$OR=\sqrt{1-4a^2}$，$V_{P-OQR}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}a\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{1-4a^2}\times a\right)=\frac{\sqrt{3}a^2}{6}\sqrt{1-4a^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{a^2\cdot a^2\cdot(1-4a^2)}=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{1}{2}\sqrt{2a^2\cdot 2a^2\cdot(1-4a^2)}=\frac{\sqrt{3}}{12}\sqrt{2a^2\cdot 2a^2\cdot(1-4a^2)}$，而 $2a^2\cdot 2a^2\cdot(1-4a^2)\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，当且仅当 $2a^2=1-4a^2$，即 $a=\frac{\sqrt{6}}{6}$，即 $PQ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，取得最大值. 此时三棱锥 $P-OQR$ 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{36}$. 故选 C.

二、多选题

9. ABC　【解析】由题图知：函数 $f(x)$ 的最小正周期 T

$=\frac{4}{3}\times\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$，则：$\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，$A=2$，所以函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$．将点 $\left(\frac{\pi}{12},2\right)$ 代入解析式中可得：$2=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)$，则：$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$．因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，因此 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，故 A 正确．选项 B，将函数 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度可得函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，故 B 正确；选项 C，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，当 $x=-\frac{11\pi}{12}$ 时，$f(x)=2$，故 C 正确；选项 D，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，所以 $f(x)\in[-2,\sqrt{3}]$，即最大值为 $\sqrt{3}$，故 D 错误．故选 ABC．

10．BD 【解析】选项 A：因为 $P(B|A)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=\frac{1}{8}$，所以 $P(A)=\frac{P(AB)}{P(B|A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$，故不正确；选项 B：随机变量 $X\sim N(2,3^2)$，则 $E(X)=2$，$D(X)=9$，若 $X=\frac{1}{3}Y-2$，则 $Y=3X+6$，所以 $E(Y)=3E(X)+6=12$，$D(Y)=9D(X)=9\times9=81$，故正确；选项 C：因为 $y=(c-1)e^{2kx}$，两边取对数，可得：$lny=\ln[(c-1)e^{2kx}]=\ln(c-1)+\ln e^{2kx}=\ln(c-1)+2kx$，令 $z=\ln y$，可得：$z=\ln(c-1)+2kx$，又因为 $z=\frac{1}{2}x+2$，故有：$\ln(c-1)=2$，$2k=\frac{1}{2}$，所以 $c=e^2+1$，$k=\frac{1}{4}$，故不正确；选项 D：若 $l_1/\!/l_2$，则 $a(a-2)-1\times3=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=3$，当 $a=3$ 时，l_1 与 l_2 重合；当 $a=-1$ 时，$l_1/\!/l_2$，故 $a=-1$，故正确．故选 BD．

11．ACD 【解析】因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，故 A 正确；$f(x)=\sin x$ 满足定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ 为偶函数，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，但在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，故 B 不正确；因为 $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ 为偶函数，所以 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$，所以 $f(x)=f(\pi-x)$，又 $f(x)=-f(-x)$，所以 $f(\pi-x)=-f(-x)$，即 $f(\pi+x)=-f(x)$，所以 $f(x+2\pi)=f(x)$，所以 C 正确，由上面得周期 $T=2\pi$，所以 $f\left(\frac{101\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，所以 D 正确．故选 ACD．

12．BCD 【解析】由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\2b=2\sqrt{3}\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\b=\sqrt{3}\\c=1\end{cases}$，则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，选项 A：$P$ 为 C 上任意一点，则 $1\leqslant|PF_1|\leqslant3$，故不正确，选项 B：$\triangle PF_1F_2$ 面积为 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times2c|y|=c|y|$，当点 P 落在短轴端点时，$\triangle PF_1F_2$ 面积最大为 $\sqrt{3}$，故正确；选项 C：点 P 在椭圆上，则 $|PF_1|+|PF_2|=4$，$|F_1F_2|=2$，所以 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2-|F_1F_2|^2-2|PF_1||PF_2|}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{16-4-2|PF_1||PF_2|}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{6}{|PF_1||PF_2|}-1$，因为

$|PF_1||PF_2|\leqslant\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=4$，当且仅当$|PF_1|=|PF_2|$时等号成立，所以$\cos\angle F_1PF_2=\frac{6}{|PF_1||PF_2|}-1\geqslant\frac{1}{2}$，所以$\angle F_1PF_2$最大为$\frac{\pi}{3}$. 故不存在点$P$，使$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$. 当$PF_2$或$PF_1$垂直于$x$轴时，有四个不同的直角三角形，故正确；选项D：设$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径为$r$，$\triangle PF_1F_2$的面积$=\frac{1}{2}(|F_1F_2|+|PF_1|+|PF_2|)\times r=(a+c)\times r=3r$，若$r$最大，需$\triangle PF_1F_2$的面积最大，选项B可知，当点$P$落在短轴端点时，$\triangle PF_1F_2$面积最大，为$\sqrt{3}$，解得此时$r=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故正确. 故选BCD.

三、填空题

13. 2 【解析】由题可得$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{b}|^2=0$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2=4$，即$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$. 故答案为2.

14. -640 【解析】$(x-2y)(2x-y)^6$的展开式中，含x^4y^3项的系数为$C_6^3 2^3\times(-1)^3-2\times C_6^2 2^4\times(-1)^2=-640$. 故答案为$-640$.

15. 25 【解析】由双曲线$C:\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$；可知$c^2=64+36=100$，故该双曲线的两个焦点分别为$(10,0)$和$(-10,0)$，则$F(10,0)$恰好为双曲线$C$的右焦点，设$E(-10,0)$为双曲线$C$的左焦点，连接$EQ$与双曲线$C$右支交于点$P$，则点$P$即为港口所在位置. 由双曲线的定义可得，$|PE|-|PF|=2a=16$，即$|PF|=|PE|-16$，则$|PQ|+|PF|=|PQ|+|PE|-16\geqslant|EQ|-16$，当且仅当$Q,P,E$三点共线时，等号成立，此时港口到两油气井的距离之和最小. 因为$E(-10,0)$，$Q(30,9)$，所以$|EQ|=\sqrt{40^2+9^2}=\sqrt{1681}=41$，此时$|PQ|+|PF|=41-16=25$. 故答案为25.

16. $\sin\beta+2\cos\beta$ 【解析】因为$\alpha-B=\beta$，$\sin B=\frac{\sin(\alpha-B)}{\sin\alpha}$，所以$\sin B=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$，在$\triangle ABD$中，$\frac{BD}{\sin\beta}=\frac{AD}{\sin B}$，所以$AD\sin\beta=BD\sin B$，所以$AD\sin\alpha=BD$，在$\triangle ACD$中，$AC=AD\sin\alpha$，所以$AC=BD$，因为$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AC$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\beta$，所以$\frac{1}{2}BD\cdot AC=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\beta$，即$BD\cdot AC=AB\cdot AD\sin\beta$，所以$BD^2=AB\cdot AD\sin\beta$，即$\sin\beta=\frac{BD^2}{AB\cdot AD}$，在$\triangle ABD$中，$\cos\beta=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\frac{1}{2}\left(\frac{AB^2+AD^2}{AD\cdot AB}-\frac{BD^2}{AB\cdot AD}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{AB^2+AD^2}{AD\cdot AB}-\sin\beta\right)$，所以$\frac{AB^2+AD^2}{AD\cdot AB}=\sin\beta+2\cos\beta$. 故答案为$\sin\beta+2\cos\beta$.

四、解答题

17. 解：(1)当$n=1$时，求得$a_1=1$，

当$n\geqslant2$时，$\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{2^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right)=\frac{a_n}{2^{n-1}}=n-(n-1)=1$，

得$\frac{a_n}{2^{n-1}}=1$，即$a_n=2^{n-1}$， (3分)

经验证可知：$a_1=1$也满足上式， (4分)

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$. (5分)

(2)根据第(1)问有：$a_n=2^{n-1}$，因为数列$\{na_n\}$的前n项和T_n，则有：

$T_n=1\times2^0+2\times2^1+3\times2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1}$， (6分)

两边同乘以 2 可得：

$2T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$，两式相减得：

$-T_n=2^0+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n=\frac{1-2^n}{1-2}-n\cdot 2^n=(1-n)2^n-1$，（8 分）

从而有：$T_n=1+(n-1)\cdot 2^n$.（10 分）

18. 解：(1)选①，由 $(a+c)(\sin A-\sin C)+(b-a)\sin B=0$ 得：

$(a+c)(a-c)+b(b-a)=0$，

即 $a^2+b^2-c^2=ab$，（2 分）

所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，（4 分）

因为 $0<C<\pi$，

故角 $C=\frac{\pi}{3}$；（5 分）

选②，由 $2\sqrt{3}\sin C\cos C=1+2\cos^2 C$ 得：

$2\sqrt{3}\sin C\cos C=2+\cos 2C$，

$-\cos 2C+\sqrt{3}\sin 2C=2\sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)=2$，

所以 $\sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)=1$，（3 分）

因为 $0<C<\pi$，$-\frac{\pi}{6}<2C-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$，

所以 $2C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，

解得：$C=\frac{\pi}{3}$；（5 分）

选③，因为 $2\sin B-\sin A=2\sin C\cos A$，

又因为 $\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，

所以 $2(\sin C\cos A+\cos C\sin A)-\sin A=2\sin C\cos A$，

$\therefore 2\cos C\sin A-\sin A=0$，（3 分）

$\because 0<A<\pi$，$\therefore \sin A\neq 0$，（4 分）

$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$，

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.（5 分）

(2)根据(1)可知：$C=\frac{\pi}{3}$，又因为 $c=4$，

由余弦定理得：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-3ab=16$，（6 分）

所以 $3ab=(a+b)^2-16\leqslant 3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，（9 分）

即 $a+b\leqslant 8$，当且仅当 $a=b=4$ 时取得等号，（10 分）

又因为根据三角形的三边关系有：$a+b>c=4$，（11 分）

所以 $8<a+c+b\leqslant 12$，

所以△ABC 周长的取值范围为 $(8,12]$.（12 分）

19. 解：(1)这 1 000 名幸运者成绩的第 75 百分位数为 x，则

所以 $\frac{1+6+8+10}{40}+(x-70)\times\frac{9}{40}=0.75$，解得 $x\approx 71$（分），（3 分）

$\mu=\frac{35\times 25+45\times 150+55\times 200+65\times 250+75\times 225+85\times 100+95\times 50}{1\ 000}=65$（分），

所以这 1 000 名幸运者成绩的第 75 百分位数约为 71 分，平均值为 65 分；（5 分）

(2)设随机变量 Y 表示任意一名幸运者的抽奖次数，则 Y 的可能取值为 1,2,3，

由已知及(1)得，$X\sim N(65,14^2)$，（6 分）

$P(Y=1)=P(X\leqslant 79)=P(X\leqslant\mu+\sigma)\approx\frac{1}{2}+\frac{0.682\ 7}{2}=0.841\ 35$，

$P(Y=2)=P(79<X\leqslant 93)=P(\mu+\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)$

$\approx\frac{0.9545-0.6827}{2}=0.1359$,

$P(Y=3)=P(X>93)=P(X>\mu+2\sigma)\approx 1-0.84135-0.1359=0.02275$, （9 分）

其分布列为

Y	1	2	3
P	0.84135	0.1359	0.0227 5

（10 分）

所以 $E(Y)=1\times 0.84135+2\times 0.1359+3\times 0.02275=1.1814$,

所以可以估计任意一名幸运者获得抽奖次数的数学期望为 1.181 4 次. （12 分）

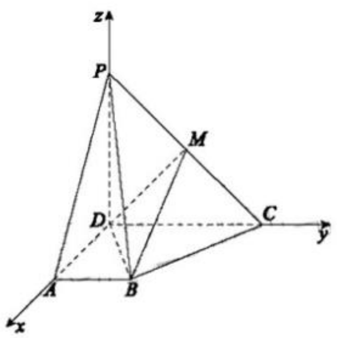
20. 证明：(1)在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\because PD\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PD\perp AD$， （1 分）

$\because AB\perp DA, AB/\!/CD$，$\therefore CD\perp DA$； （2 分）

又$\because CD\cap PD=D$；$\therefore AD\perp$ 面 PCD； （3 分）

又$\because AD\subset$ 面 PAD；$\therefore$ 平面 $PAD\perp$ 平面 PCD. （5 分）

(2)由(1)得 DA,DP,DC 两两垂直，所以以 D 为原点，以 DA,DC,DP 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示空间直角坐标系 $Dxyz$，



则依题意有：$D(0,0,0),A(1,0,0),B(1,1,0),C(0,2,0),P(0,0,2),\overrightarrow{PC}=(0,2,-2)$

由 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，得点 $M(0,2\lambda,2-2\lambda)$， （6 分）

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，故平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{DP}=(0,0,2)$， （7 分）

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDM 的法向量，又因为 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0),\overrightarrow{DM}=(0,2\lambda,2-2\lambda)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+y=0\\ 2\lambda y+(2-2\lambda)z=0\end{cases}$，令 $x=1$，

则 $y=-1,z=\frac{\lambda}{1-\lambda}$，$\therefore\boldsymbol{n}=\left(1,-1,\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)$， （8 分）

$\because$ 二面角 $M-BD-A$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore\left|-\frac{\sqrt{3}}{3}\right|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DP}|}\right|=\left|\frac{\frac{\lambda}{1-\lambda}}{\sqrt{2+\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2}}\right|$，解

得 $\lambda=\frac{1}{2}$， （10 分）

故有 $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$，此时点 M 为线段 PC 的中点.

设直线 BC 与平面 BDM 所成的角为 θ，平面 BDM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$；又因为 $\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，所以

$\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BC}|}=\left|\frac{-2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

即直线 BC 与平面 BDM 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. （12 分）

21. 解：(1)根据题意可得 $m+\frac{p}{2}=2$，又 $2^2=2pm$， （1 分）

解得 $m=1,p=2$，

故所求抛物线 C 方程 $y^2=4x$.　　(4 分)

(2)设点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为(1,0).

当直线 l 的斜率等于 0 时，不符合题意；当直线 l 的斜率不等于 0 时，设过抛物线焦点的直线 l 的方程为：$x=ty+1$，

由 $\begin{cases}y^2=4x\\x=ty+1\end{cases}$，消去 x 得：$y^2-4ty-4=0$，　　(5 分)

$\Delta=16t^2+16>0$，得 $t\in\mathbf{R}$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$，　　(6 分)

因为 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(x_1+2)(x_2+2)+(y_1-4)(y_2-4)$

$=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4+y_1y_2-4(y_1+y_2)+16$

$=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}+2\left(\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4}\right)+4+y_1y_2-4(y_1+y_2)+16$

$=\frac{(y_1y_2)^2}{16}+\frac{1}{2}[(y_1+y_2)^2-2y_1y_2]+4+y_1y_2-4(y_1+y_2)+16$

$=1+\frac{1}{2}[(4t)^2+8]+4-4-16t+16=8t^2-16t+21=8(t-1)^2+13.$　　(8 分)

所以当 $t=1$ 时，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 取得最小值为 13，

此时直线 l 的方程为 $x-y-1=0$.　　(9 分)

根据弦长公式有：

$|MN|=\sqrt{1+t^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+1^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{16+16}=8$；　　(10 分)

点 $A(-2,4)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|-2-4-1|}{\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$；　　(11 分)

故△AMN 面积为 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}|MN|d=\frac{1}{2}\times8\times\frac{7\sqrt{2}}{2}=14\sqrt{2}$.　　(12 分)

22. 解：(1)根据已知条件有：$f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=2x-\frac{a}{x}=\frac{2\left(x^2-\frac{a}{2}\right)}{x}$，　　(1 分)

①$a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

②$a>0$ 时，$f'(x)=\frac{2\left(x+\sqrt{\frac{a}{2}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)}{x}$，

令 $f'(x)>0$，解得 $x>\sqrt{\frac{a}{2}}$；令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<\sqrt{\frac{a}{2}}$，

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$ 递减，在 $\left(\sqrt{\frac{a}{2}},+\infty\right)$ 递增，

综上：$a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

$a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)$ 递减，在 $\left(\frac{\sqrt{2a}}{2},+\infty\right)$ 递增；　　(5 分)

(2)要证 $f(x)>g(x)$，

即证 $e^x>ax\ln x$，$a\in\left(0,\frac{e^2}{2}\right]$，$x\in(0,+\infty)$，

①当 $0<x\leqslant1$ 时，$e^x>1$，$ax\ln x\leqslant0$，该不等式恒成立；

②当 $x>1$ 时，$x\ln x>0$，结合 $a\in\left(0,\frac{e^2}{2}\right]$，得 $0<ax\ln x\leqslant\frac{1}{2}e^2x\ln x$，　　(6 分)

只需证明：$e^x>\frac{1}{2}e^2x\ln x\ (x>1)$，

证法一：即证 $\frac{2e^{x-2}}{x}-\ln x>0\ (x>1)$，　　(7 分)

令 $F(x)=\frac{2e^{x-2}}{x}-\ln x$，$F'(x)=\frac{2e^{x-2}(x-1)-x}{x^2}$，

令 $h(x)=2e^{x-2}(x-1)-x$，则 $h'(x)=2xe^{x-2}-1$，

令 $m(x)=2xe^{x-2}-1$，则 $m'(x)=(2x+2)e^{x-2}>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，所以 $h'(x)=2xe^{x-2}-1$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增， （8 分）

又 $h'(1)=\frac{2}{e}-1<0, h'(2)=3>0$，所以存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $h'(x_0)=0$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增， （9 分）

又 $h(1)=-1<0, h(x_0)=2e^{x_0-2}(x_0-1)-x_0=1-\frac{1}{x_0}-x_0<0, h(2)=0, h(3)=4e-3>0$，

所以当 $x\in(1,2)$ 时，$F'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，

即函数 $F(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增， （11 分）

所以 $F(x)\geqslant F(2)=1-\ln 2>0$，问题得证，

即当 $a\in\left(0,\frac{e^2}{2}\right]$ 时，$f(x)>g(x)$ 恒成立． （12 分）

证法二：即证 $\frac{e^x}{x^2}>\frac{e^2}{2}\cdot\frac{\ln x}{x}(x>1)$，令 $u(x)=\frac{e^2}{2}\cdot\frac{\ln x}{x}(x>1)$， （7 分）

则 $u'(x)=\frac{e^2}{2}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{e^2}{2}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$，

则有 $u(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，可知 $u(x)_{\max}=\frac{\ln e}{e}\cdot\frac{e^2}{2}=\frac{e}{2}$， （9 分）

设 $m(x)=\frac{e^x}{x^2}$，$\therefore m(x)=\frac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$，$\therefore m(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore$ 可知 $m(x)\geqslant m(2)=\frac{e^2}{4}=\frac{e}{2}\cdot\frac{e}{2}>\frac{e}{2}=u(x)_{\max}$，即 $m(x)_{\min}>u(x)_{\max}$， （11 分）

有 $m(x)>u(x)$ 对 $\forall x>1$ 成立，即当 $x>1$ 时，$\frac{e^x}{x^2}>\frac{e^2}{2}\cdot\frac{\ln x}{x}$ 恒成立．综上所述，当 $a\in\left(0,\frac{e^2}{2}\right]$ 时，$f(x)>g(x)$ 恒成立． （12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。