成都石室中学 2023-2024 年度上期高 2024 届期末考试
数学试题（理）

参考答案

1．若复数 z 满足 $z\mathrm{i}=2-\mathrm{i}$（i 是虚数单位），则 $\bar{z}=$（　）

A．$-1+2\mathrm{i}$　　B．$-1-2\mathrm{i}$　　C．$1-2\mathrm{i}$　　D．$1+2\mathrm{i}$

【答案】A

【分析】计算 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-1-2\mathrm{i}$，再计算共轭复数即可.

【详解】$z\mathrm{i}=2-\mathrm{i}$，则 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-1-2\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=-1+2\mathrm{i}$.

故选：A

2.已知集合 $M=\left\{y\middle|y=2^x,x\le 1\right\}$，$N=\left\{x\middle|y=\sqrt{x-x^2}\right\}$，则 $M\cup N$ 等于（　）

A．$(0,1]$　　B．$\{2\}$　　C．$[0,2]$　　D．$(-\infty,2]$

2．C

【分析】根据指数函数单调性得到 $M=(0,2]$，解不等式求出 $N=[0,1]$，利用并集概念求出答案.

【详解】$y=2^x\in(0,2]$，故 $M=(0,2]$，

令 $x-x^2\ge 0$，解得 $0\le x\le 1$，故 $N=[0,1]$，

故 $M\cup N=[0,2]$.

故选：C

3．设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{13}=26$，则 $a_3+a_8+a_{10}$ 的值为

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

【答案】选 A

【解析】由 $S_{13}=13a_7=26$，可得 $a_7=2$，则 $a_3+a_8+a_{10}=3a_7=6$.

4．$\left(x+\dfrac{y^2}{x}\right)(x-y)^5$ 的展开式中，x^3y^3 的系数为

A．-15　　B．-5　　C．5　　D．15

【答案】选 A

【解析】$\because\left(x+\dfrac{y^2}{x}\right)(x-y)^5=x(x-y)^5+\dfrac{y^2}{x}(x-y)^5$，

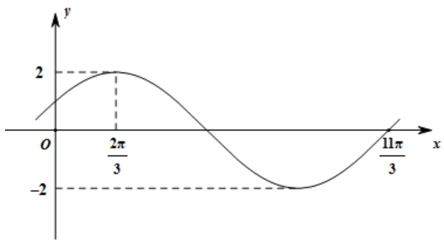
$x(x-y)^5$ 的展开式通项为 $T_k=xC_5^k\cdot x^{5-k}\cdot(-y)^k=(-1)^kC_5^k\cdot x^{6-k}\cdot y^k$，

$\dfrac{y^2}{x}(x-y)^5$ 的展开式通项为 $S_r=\dfrac{y^2}{x}C_5^r\cdot x^{5-r}\cdot(-y)^r=(-1)^rC_5^r\cdot x^{4-r}\cdot y^{r+2}$，

由 $\begin{cases}6-k=3\\4-r=3\end{cases}$，可得 $\begin{cases}k=3\\r=1\end{cases}$，

因此，式子 $\left(x+\dfrac{y^2}{x}\right)(x-y)^5$ 的展开式中，x^3y^3 的系数为 $(-1)^3C_5^3+(-1)^1C_5^1=-15$.

5.函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 部分图象如图所示，则 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=$



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

【答案】选 D

【解析】由函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象知，$A=2$，$\frac{3}{4}T=\frac{11\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=3\pi$，

解得 $T=4\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore \omega=\frac{1}{2}$，又 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=2$，可得 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

解得 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$，$\because |\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore$可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，$\therefore f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

6．已知圆 $C:x^2+y^2-6x+5=0$ 与中心在原点、焦点在坐标轴上的双曲线 D 的一条渐近线相切，则双曲线 D 的离心率为（　）

.A．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　B．3　　C．$\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{3}{2}$

【答案】D

【分析】分双曲线的焦点在 x 轴上和 y 轴上，由圆心到渐近线的距离等于半径列式求解即可.

【详解】因为 $C:x^2+y^2-6x+5=0$ 可化为 $(x-3)^2+y^2=4$，

则圆 C 的圆心为 $(3,0)$，半径为 2，

当双曲线的焦点在 x 轴上时，设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，则其渐近线方程为 $bx\pm ay=0$，

由题意得 $\frac{3b}{\sqrt{b^2+a^2}}=2$，即 $5b^2=4a^2$，所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{4}{5}$，

所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{4}{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，

当双曲线的焦点在 y 轴上时，设双曲线方程为 $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$，则其渐近线方程为 $ax\pm by=0$，

由题意得 $\frac{3a}{\sqrt{b^2+a^2}}=2$，即 $5a^2=4b^2$，所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{4}$，

则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{5}{4}}=\frac{3}{2}$，

故选：D.

7. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=x^3-x+1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为

A．$2x+y-1=0$　　B．$2x-y-3=0$　　C．$2x+y-3=0$　　D．$2x-y-1=0$

【答案】选 C

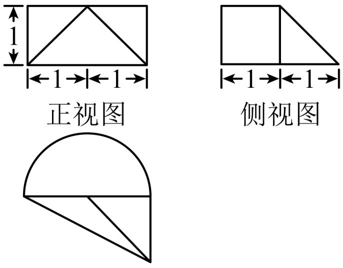
【解析】因为 $x<0$，$f(x)=x^3-x+1$，$f(-1)=1$，又由 $f(x)$ 是偶函数，$\therefore f(1)=1$，

令 $-x<0$，则 $f(-x)=-x^3+x+1$，根据 $f(x)$ 是偶函数，$f(-x)=f(x)$，

得到 $x>0$ 时，$f(x)=-x^3+x+1$，所以，$x>0$ 时，$f'(x)=-3x^2+1$，$f'(1)=-2$，

故曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-1=-2(x-1)$，即 $2x+y-3=0$.

8．已知一个组合体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　）



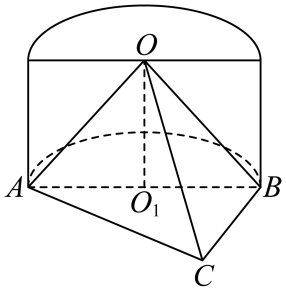
A．$2\pi+2+\sqrt{2}$　　B．$2\pi+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

C．$2\pi+2+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$　　D．$2\pi+3+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

【答案】C

【分析】先由三视图原几何体，再分别求得各面的面积相加即可得解.

【详解】由题知，该三视图对应的几何体的直观图如图所示，



其中半圆柱的底面半径为 1、高为 1，三棱锥$O-ABC$中，O在底面ABC的射影O_1为AB的中点，$BC\perp AB$，$BC=1$，

∴$OA=OB=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{5}$，

因为$OO_1\perp$面ABC，$BC\subset$面ABC，所以$BC\perp OO_1$，

又$BC\perp AB$，$AB\cap OO_1=O_1, AB, OO_1\subset$面$ABO$，所以$BC\perp$面$ABO$，

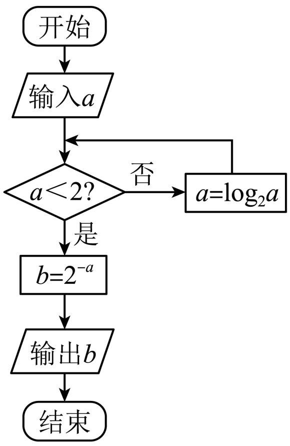
又$OB\subset$面ABO，故$BC\perp OB$，

∴$OC=\sqrt{3}$，∴$AC^2=OA^2+OC^2$，∴$OA\perp OC$，

∴该几何体的表面积为$\pi\times1\times1+\pi\times1^2+2\times\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=2\pi+2+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

故选：C.

9．执行如图所示的程序框图，若随机输入的$a\in[0,16)$，则输出的$b\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$的概率为（　）



A．$\frac{3}{16}$　　B．$\frac{15}{16}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{3}{4}$

【答案】B

【分析】根据 $b\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ 可得 $a\in[1,2)$，再根据循环结构可得当 $a\in[1,16)$ 时均能得到 $b\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$，从而可得答案.

【详解】由框图可得若 $b\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$，则 $\frac{1}{4}<2^{-a}\le\frac{1}{2}$，解得 $a\in[1,2)$.

故当 $a\in[0,1)$，满足 $a<2$，可得输出 $b\in\left(\frac{1}{2},1\right]$；

当 $a\in[1,2)$ 时，满足 $a<2$，可得输出 $b\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$；

当 $a\in[2,4)$ 时，不满足 $a<2$，此时 $a=\log_2 a\in[1,2)$，故可得输出 $b\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$；

当 $a\in[4,16)$ 时，不满足 $a<2$，此时 $a=\log_2 a\in[2,4)$；

不满足 $a<2$，此时 $a=\log_2 a\in[1,2)$，可得输出 $b\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$.

故当 $a\in[1,16)$ 时均能得到 $b\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$，故输出的 $b\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ 的概率为 $\frac{16-1}{16}=\frac{15}{16}$.

故选：B

10.若 $2^x=3$，$3^y=4$，则下列选项正确的是

A．$y>\frac{3}{2}$　　　　B．$x<y$　　　　C．$\frac{1}{x}+y>2$　　　　D．$x+y>2\sqrt{2}$

【答案】选 D

【解析】因为 $2^x=3$，$3^y=4$，所以 $x=\log_2 3, y=\log_3 4$，

因为 $\log_2 3>\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$，$\log_3 4<\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$，即 $x>\frac{3}{2}, y<\frac{3}{2}$,所以 $x>y$，所以 A，B 错误；

因为 $\frac{1}{x}+y=\frac{1}{\log_2 3}+\log_3 4=\log_3 2+\log_3 4=\log_3 8<\log_3 9=2$，所以 $\frac{1}{x}+y<2$，所以 C 错误；

因 $x+y=\log_2 3+\log_3 4=\log_2 3+2\log_3 2=\log_2 3+\frac{2}{\log_2 3}>2\sqrt{\log_2 3\cdot\frac{2}{\log_2 3}}=2\sqrt{2}$，所以 D 正确.

11. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在球 O 的内部，球心 O 在平面 $ABCD$ 上，若球的半径为 $\sqrt{3}$，$AB=BC$，则该长方体体积的最大值是

A．4　　B．8　　C．12　　　　D．18

【答案】选 A

【解析】设长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高为 h，设 $AB=a$，则 $BD=\sqrt{2}a$，所以 $\frac{BD}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.由勾股定理得 $h^2+(\frac{BD}{2})^2=\sqrt{3}^2=3$ 即 $h^2+\frac{a^2}{2}=3$ 得 $a^2=6-2h^2$，

所以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $V=a^2h=\left(6-2h^2\right)h=-2h^3+6h$，

设 $f(h)=-2h^3+6h$，其中 $0<h<\sqrt{3}$，则 $f'(h)=-6h^2+6$，令 $f'(h)=0$，得 $h=1$，

当 $0<h<1$ 时，$f'(h)>0$，$f(h)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增；当 $1<h<\sqrt{3}$ 时，$f'(h)<0$，$f(h)$ 在 $(1,\sqrt{3})$ 上单调递减.所以函数 $V=f(h)$ 在 $h=1$ 处取得极大值，亦即最大值，则 $V_{\max}=f(1)=4$.

因此该长方体的体积的最大值为 4.

12．曲线 C 是平面内与三个定点 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$ 和 $F_3(0,1)$ 的距离的和等于 $2\sqrt{2}$ 的点的轨迹.给出下列四个结论：

①曲线 C 关于 x 轴、y 轴均对称；

②曲线C上存在点P，使得$|PF_3|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$；

③若点P在曲线C上，则$\triangle F_1PF_2$的面积最大值是 1；

④曲线C上存在点P，使得$\angle F_1PF_2$为钝角.

其中所有正确结论的序号是（　　）

A. ②③④　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①②③④

【答案】C ③④

【分析】①由已知表示出C的方程，观察方程的对称性可以判断结果；②假设结论成立，推理出曲线不存在，不合题意；③点P在椭圆上顶点时，满足题意，且面积最大；④寻找曲线C上的一个特殊点，验证$\angle F_1PF_2$为钝角.

【详解】设曲线C上任意一点$P(x，y)$，由题意可知C的方程为

$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2\sqrt{2}$.

①错误,在此方程中用$-x$取代x，方程不变，可知C关于y轴对称；同理用$-y$取代y，方程改变，可知C不关于x轴对称，故①错误.

②错误,若$|PF_3|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则$|PF_1|+|PF_2|=\frac{4\sqrt{2}}{3}<|F_1F_2|=2$,曲线$C$不存在，故②错误.

③正确, $|PF_1|+|PF_2|\le|PF_1|+|PF_2|+|PF_3|=2\sqrt{2}$，$P$应该在椭圆$D$：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$内(含边界)，曲线$C$与椭圆$D$有唯一的公共点$F_3(0,1)$，此时$|F_1F_2|=2$, $|OF_3|=1$,当点P为F_3点时，$\triangle F_1PF_2$的面积最大，最大值是 1；故③正确

④正确，由③可知，取曲线C上点$F_3(0,1)$，此时$\angle F_1F_3F_2=90^\circ$，下面在曲线$C$上再寻找一个特殊点$P(0，y)$，$0<y<1$，则$2\sqrt{1+y^2}+1-y=2\sqrt{2}$，

把$2\sqrt{1+y^2}=2\sqrt{2}-1+y$两边平方，整理得$3y^2+(2-4\sqrt{2})y+4\sqrt{2}-5=0$，

解得$y=\frac{4\sqrt{2}-2\pm(8-4\sqrt{2})}{6}$，即$y=1$或$\frac{4\sqrt{2}-5}{3}$.

因为$0<\frac{4\sqrt{2}-5}{3}<1$，则取点$P\left(0,\frac{4\sqrt{2}-5}{3}\right)$，此时$\angle F_1PF_2>90^\circ$.故④正确.

故答案为：③④.

【点睛】易错点睛：与椭圆相关的综合问题，难度大，要注意：

(1)注意观察方程的特征，利用代数方法判断曲线C的对称性；

(2)适当利用反向推理，假设成立，再反向推理看是否合理；

(3)椭圆焦点三角中，当点在椭圆上下顶点时，焦点三角形面积最大，椭圆上点与两个焦点的张角最大；

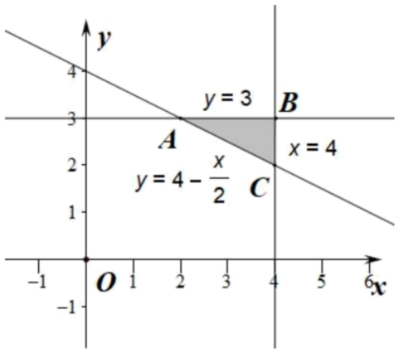
(3)验证存在性的问题，只需找到一个正例就可以说明其存在性；验证某个结论错误时，只需一个反例即可说明.

13. 若x、y满足约束条件$\begin{cases}x+2y\ge 8\\0\le x\le 4\\0\le y\le 3\end{cases}$，则$z=x+y$的最大值为__________.

【答案】7

【解析】由题意可知，约束条件为$\begin{cases}x+2y\ge 8\\0\le x\le 4\\0\le y\le 3\end{cases}$，

根据约束条件可绘出可行域：



当目标函数经过点 $B(4,3)$ 时取最大值，$z_{\max}=4+3=7$.

14. 设 $f(x)=\frac{1}{x}+\log_2\frac{2}{x}$，则不等式 $f(\frac{1}{x}-1)>\frac{1}{2}$ 的解集为__________.

【答案】$\left(\frac{1}{3},1\right)$

【解析】由题意，函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\log_2\frac{2}{x}$，根据初等函数的性质，可得函数 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 为单调递减函数，且 $f(2)=\frac{1}{2}$，则不等式 $f(\frac{1}{x}-1)>\frac{1}{2}$ 等价于 $0<\frac{1}{x}-1<2$，解得 $\frac{1}{3}<x<1$，所以不等式的解集为 $\left(\frac{1}{3},1\right)$.

15．已知 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$，则 $\cos\left(2\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$ 的值为__________.

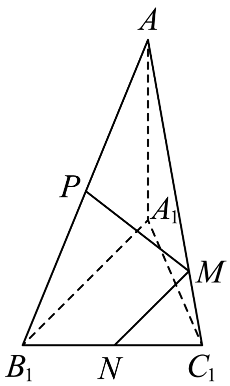
【答案】$-\frac{5}{9}$

【分析】利用倍角公式和诱导公式求解即可.

【详解】$\cos\left(2\alpha+\frac{4}{3}\pi\right)=\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-1=-\frac{5}{9}$

16．如图，在三棱锥 $A-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, $\angle A_1B_1C_1=90^\circ$，$A_1B_1=2A_1A=2B_1C_1=2$, P 为线段 AB_1 的中点，M,N 分别为线段 AC_1 和线段 B_1C_1 上任意一点，则 $\sqrt{5}PM+MN$ 的最小值为__________.



【答案】$\sqrt{5}$

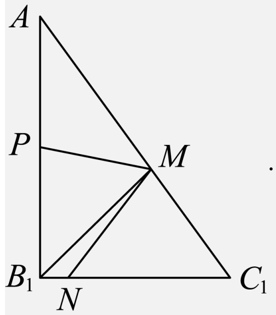
【分析】先利用线面垂直的判定定理推得 $B_1C_1\perp AB_1$, 再利用面积相等在 $\mathrm{Rt}\triangle AB_1C_1$ 中推得 $\sqrt{5}PM\sin\angle MPA+MN\sin\angle MNC_1=\sqrt{5}$，从而得到 $\sqrt{5}\le\sqrt{5}PM+MN$，由此得解.

【详解】因为 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，$A_1B_1,B_1C_1\subset$ 面 $A_1B_1C_1$，所以 $AA_1\perp B_1C_1, AA_1\perp A_1B_1$，

又 $\angle A_1B_1C_1=90^\circ$，$B_1C_1\perp A_1B_1$，

因为 $AA_1\cap A_1B_1=A_1$，$AA_1,A_1B_1\subset$ 平面 AB_1A_1，所以 $B_1C_1\perp$ 平面 AB_1A_1，

又 $AB_1 \subset$ 平面 AB_1A_1，所以 $B_1C_1 \perp AB_1$,



.

又在 $\mathrm{Rt}\triangle AA_1B_1$ 中， $AB_1=\sqrt{AA_1^{2}+A_1B_1^{2}}=\sqrt{5}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AB_1C_1$ 中， $S_{\triangle AB_1M}+S_{\triangle B_1MC_1}=S_{\triangle AB_1C_1}$，

故 $\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times PM\sin\angle MPB_1+\frac{1}{2}\times1\times MN\sin\angle MNC_1=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{5}$，

则 $\sqrt{5}PM\sin\angle MPB_1+MN\sin\angle MNC_1=\sqrt{5}$，

又 $\sqrt{5}PM\sin\angle MPB_1\le\sqrt{5}PM, MN\sin\angle MNC_1\le MN$，

所以 $\sqrt{5}PM\sin\angle MPB_1+MN\sin\angle MNC_1\le\sqrt{5}PM+MN$，

即 $\sqrt{5}\le\sqrt{5}PM+MN$，当且仅当 $\angle MPB_1=90°,\angle MNC_1=90°$ 时，等号成立，

当 $\angle MPB_1=90°$ 时， M 为 AC_1 的中点，此时当 $\angle MNC_1=90°$ 时， N 为 B_1C_1 的中点，

综上所述 $\sqrt{5}PM+MN$ 的最小值是 $\sqrt{5}$.

【点睛】关键点睛：本题的突破口是如何解决 PM,MN 的系数问题，利用三角形面积公式与面积相等得到 $\sqrt{5}PM\sin\angle MPA+MN\sin\angle MNC_1=\sqrt{5}$ 即可得解.

17．某学校研究性学习小组在学习生物遗传学的过程中，为验证高尔顿提出的关于儿子成年后身高 y（单位： cm ）与父亲身高 x （单位： cm ）之间的关系及存在的遗传规律，随机抽取了 5 对父子的身高数据，如下表：

父亲身高 x	160	170	175	185	190
儿子身高 y	170	174	175	180	186

参考数据及公式： $\sum_{i=1}^{5}x_i=880$， $\sum_{i=1}^{5}x_i^2=155450$， $\sum_{i=1}^{5}y_i=885$， $\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=156045$， $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$

(1)根据表中数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程;

(2)小明的父亲身高 178cm，请你利用回归直线方程预测小明成年后的身高.

【答案】(1) $\hat{y}=0.5x+89$ ，规律见解析

(2)178cm

【详解】(1) $\bar{x}=\frac{1}{5}\times\sum_{i=1}^{5}x_i=\frac{1}{5}\times880=176$， $\bar{y}=\frac{1}{5}\times\sum_{i=1}^{5}y_i=\frac{1}{5}\times885=177$，……………………2 分

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{156045-5\times176\times177}{155450-5\times176^2}=0.5$， $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=177-0.5\times176=89$，………………5 分

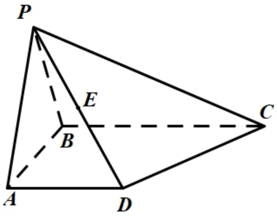
故回归方程为：$\hat{y}=0.5x+89$，……………………………………………………………………7 分

（2）

当$x=178$时,$\hat{y}=0.5\times178+89=178cm$ …………………………………………………………..10 分

$\therefore$ 预测小明成年后的身高为$178cm$ ……………………………………………………………………12 分

18．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为直角梯形，$AB\perp AD$，$AD//BC$，侧面$PAB\perp$面$ABCD$，$PA=AB=AD=2$，$BC=4$，E为PD的中点.



(1)求证：面$PBC\perp$面PDC；

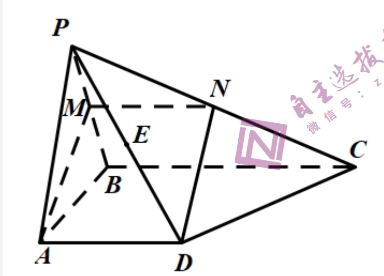
(2)若二面角$P-AD-B$的大小为$60°$，求BE与面PBC所成角的正弦值.

【答案】(1)证明见解析 (2)$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

【分析】（1）分别取PB、PC中点M、N，连接AM，MN，DN，利用线线垂直证明线面垂直，进而可证面面垂直；

（2）过点P作$PO\perp AB$，由二面角的定义可知$\angle PAB=60°$，进而可得$\triangle PAB$为正三角形，以点O为坐标原点建立空间直角坐标系，利用坐标法可得线面夹角正弦值；

【详解】（1）



分别取PB、PC中点M、N，连接AM，MN，DN，

则$MN//BC$且$MN=\dfrac{1}{2}BC=2$，

又$\because AD//BC$，$AD=2=\dfrac{1}{2}BC$，

$\therefore MN//AD$，$MN=AD$，

$\therefore$四边形$ADNM$为平行四边形，$DN//AM$，

又$\because PA=AB$，

$\therefore AM\perp PB$，$DN\perp PB$，

$\because$平面$PAB\perp$平面$ABCD$，且平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$，$AD\perp AB$，

$\therefore AD\perp$平面PAB，$AM\subset$平面PAB，

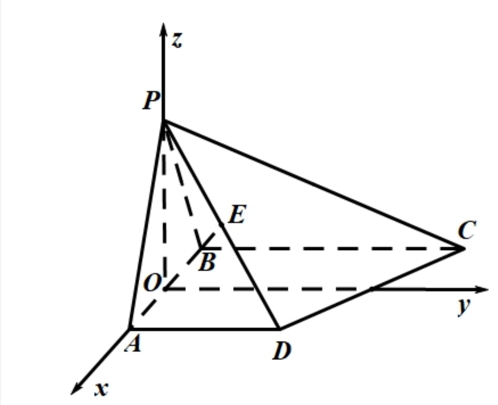
$\therefore AD\perp AM$，$DN\perp MN$，

$\because PB\cap MN=M$，且PB，$MN\subset$平面PBC，

$\therefore DN\perp$平面PBC，

$\because DN\subset$平面PDC，

$\therefore$平面$PBC\perp$平面PDC；…………………………………………………………5 分

（2）

过点 P 作 $PO\perp AB$，则 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

由（1）得 $AD\perp$ 平面 PAB，

$\therefore AP\perp AD$， $AB\perp AD$，

所以二面角 $P-AD-B$ 的平面角为 $\angle PAB$，即 $\angle PAB=60^\circ$，

又 $PA=AB=2$，

即 $\triangle PAB$ 为正三角形，

$\therefore OA=OB=1$， $OP=\sqrt{3}$，

以点 O 为坐标原点， OA 为 x 轴， OP 为 z 轴建立空间直角坐标系，

则 $B(-1,0,0)$， $C(-1,4,0)$， $D(1,2,0)$， $P(0,0,\sqrt{3})$， ……………………………………………7 分

又 E 为 PD 中点，

$\therefore E\left(\frac{1}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $\overrightarrow{BE}=\left(\frac{3}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $\overrightarrow{BC}=(0,4,0)$， $\overrightarrow{BP}=(1,0,\sqrt{3})$，

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{m}=4y_1=0\\ \overrightarrow{BP}\cdot\vec{m}=x_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$， 令 $z_1=1$，得 $\vec{m}=(-\sqrt{3},0,1)$， ……………………………………………9 分

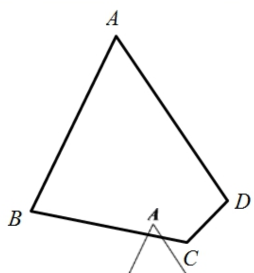
则 $\cos\left\langle\overrightarrow{BE},\vec{m}\right\rangle=\dfrac{\frac{3}{2}\times(-\sqrt{3})+1\times0+\frac{\sqrt{3}}{2}\times1}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(-\sqrt{3})^2+0^2+1^2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$， ……………………………………11 分

$\therefore$ 直线 BE 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$； ……………………………………………………12 分

19.（本小题满分 12 分）为加强学生劳动教育，成都石室中学北湖校区将一块四边形园地 $ABCD$ 用于蔬菜种植实践活动. 经测量，边界 AB 与 AD 的长度都是 14 米， $\angle BAD=60^\circ$， $\angle BCD=120^\circ$.

(1)若 DC 的长为 6 米，求 BC 的长；

(2)现需要沿实验园的边界修建篱笆以提醒同学们不要随意进入，问所需要篱笆的最大长度为多少米?

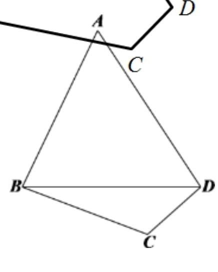


【解析】(1)连接 BD，由题意△ABD 是等边三角形，所以 BD=14，

在△BCD 中，由余弦定理得， $|BD|^2=|BC|^2+|CD|^2-2|BC|\cdot|CD|\cos\angle BCD$

即 $|BC|^2+6|BC|-160=0$，求解得 $|BC|=10$（舍去 $|BC|=-16$）

故 BC 的长为 10 米.……………………………………………………………… 5



(2)设 $\angle BDC=\theta$， $\angle CBD=\frac{\pi}{3}-\theta$，

在 $\triangle BCD$ 中，$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle C}=\frac{14}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{28}{\sqrt{3}}$，

所需篱笆的长度为

$f(\theta)=28+\frac{28\sqrt{3}}{3}\left(\sin\theta+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right)$

$=28+\frac{28\sqrt{3}}{3}\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)=28+\frac{28\sqrt{3}}{3}\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\leq 28+\frac{28\sqrt{3}}{3}$.…………10 分

……………………………………12 分

则当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，所需篱笆的最大长为 $28+\frac{28\sqrt{3}}{3}$ 米

20.（本小题满分 12 分）已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，抛物线 $C_2:y^2=4x$ 在第一象限与椭圆 C_1 交于点 A，点 F 为抛物线 C_2 的焦点，且满足 $|AF|=\frac{5}{3}$.

(1)求椭圆 C_1 的方程；

(2)设直线 $x=my+1$ 与椭圆 C_1 交于 P,Q 两点，过 P,Q 分别作直线 $l:x=t(t>2)$ 的垂线，垂足为 M、N，l 与 x 轴的交点为 T．若△PMT、△PQT、△QNT 的面积成等差数列，求实数 m 的取值范围.

【解析】(1)由题意，$|AF|=x_M+1=\frac{5}{3}$，则点 $A\left(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ 在椭圆上，

得 $\frac{4}{9a^2}+\frac{8}{3b^2}=1$，① $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$ 即 $3a^2=4b^2$ ②

联立①②，解得 $a^2=4$，$b^2=3$，∴椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；……………………4 分

(2)依题意，直线 PQ 与 x 轴不重合，故可设直线 PQ 的方程为 $x=my+1$.

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ x=my+1\end{cases}$，消去 $x:(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），则有△>0，且 $y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$．7 分

设△PMT，△PQT，△QNT 的面积分别为 S_1，S_2，S_3，

∵S_1，S_2，S_3 成等差数列，∴$2S_2=S_1+S_3$，即 $3S_2=S_1+S_2+S_3$，

则 $3\times\frac{1}{2}(t-1)\times|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\left[(t-x_1)+(t-x_2)\right]\times|y_1-y_2|$；

即 3（t－1）＝$2t$－（x_1+x_2），得 t＝3－（x_1+x_2），……………………………………9 分

又 $x_1=my_1+1$，$x_2=my_2+2$，

于是，t＝3－（my_1+my_2+2）＝1－m（y_1+y_2），∴ $t=1+\frac{6m^2}{3m^2+4}>2$，解得 $m^2>\frac{4}{3}$.

21.（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-m\ln x-m$，其中 e 是自然对数的底数.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $m=1$，设关于 x 的不等式 $f(x)\leq x\ln x-\frac{1}{x}-kx+n$ 对 $\forall x\in[1,\mathrm{e}]$ 恒成立时 k 的最大值为 $c(k\in\mathbf{R},n\in[1,\mathrm{e}])$，求 $n+c$ 的取值范围.

【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{m}{x}=\frac{x^2-mx+1}{x^2}$， 1 分

当 $m\le 2$ 时， $f'(x)\ge 0$， $x\in(0,+\infty), f(x)$ 单调递增；

当 $m>2$ 时， $f'(x)=\frac{x^2-mx+1}{x^2}=0$， $x_1=\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}, x_2=\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$，

$f'(x)>0, x\in(0,x_1),(x_2,+\infty), f(x)$ 单调递增； $f'(x)<0, x\in(x_1,x_2), f(x)$ 单调递减； 4 分

综上，当 $m\le 2$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $m>2$ 时， $f(x)$ 在 $(0,\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}),(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2},+\infty)$ 单调递增，在 $(\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2},\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2})$ 单调递减.

…………………………………………………………………………………………5 分

(2)因为 x 的不等式 $f(x)\le x\ln x-\frac{1}{x}-kx+n$ 对 $\forall x\in[1,\mathrm{e}]$ 恒成立,

则 $k\le\frac{(1+\ln x)-x+x\ln x+n}{x}$，对 $\forall x\in[1,\mathrm{e}]$ 恒成立,……………………………………6 分

令 $g(x)=\frac{1+\ln x-x+x\ln x+n}{x}$，

即 $g'(x)=\frac{-\ln x+x-n}{x^2}$，令 $p(x)=-\ln x+x-n$，即 $p'(x)=-\frac{1}{x}+1\ge 0$，

所以 $p(x)$ 在 $x\in[1,\mathrm{e}]$ 上递增；………………………………………………………7 分

①当 $p(1)\ge 0$，即 $n\le 1$ 时，因为 $n\in[1,\mathrm{e}]$，所以 $n=1$，

当 $x\in[1,\mathrm{e}]$， $p(x)\ge 0$，即 $g'(x)\ge 0$，所以 $g(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上递增，

所以 $c=g(x)_{\min}=g(1)=n$，故 $n+c=2n=2$；……………………………………………8 分

②当 $p(\mathrm{e})\le 0$ 即 $n\in[\mathrm{e}-1,\mathrm{e}]$ 时，因为 $x\in[1,\mathrm{e}]$， $p(x)\le 0$，即 $g'(x)\le 0$，

所以 $g(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上递减，所以 $c=g(x)_{\min}=g(\mathrm{e})=\frac{n+2}{\mathrm{e}}$，故 $n+c=\frac{n+2}{\mathrm{e}}+n\in\left[\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}+\frac{2}{\mathrm{e}}+1\right]$；9 分

③当 $p(1)p(\mathrm{e})<0$，即 $n\in(1,\mathrm{e}-1)$ 时，因为 $p(x)=-\ln x+x-n$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上递增，

所以存在唯一实数 $x_0\in(1,\mathrm{e})$，使得 $p(x_0)=0$，即 $n=x_0-\ln x_0$，

则当 $x\in(1,x_0)$ 时， $p(x)<0$，即 $g'(x)<0$；当 $x\in(x_0,\mathrm{e})$ 时， $p(x)>0$，即 $g'(x)>0$，

故 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单减， (x_0,e) 上单增，所以 $c=g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{1+\ln x_0-x_0+x_0\ln x_0+n}{x_0}=\ln x_0+\frac{1}{x_0}$，

所以 $n+c=\ln x_0+\frac{1}{x_0}+x_0-\ln x_0=x_0+\frac{1}{x_0}$，

设 $u(x)=x_0+\frac{1}{x_0}(x_0\in(1,\mathrm{e}))$，则 $u'(x)=1-\frac{1}{x_0^2}=\frac{x_0^2-1}{x_0}>0$，

所以 $u(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上递增，所以 $n+c\in\left(2,\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

综上所述， $n+c\in\left[2,\mathrm{e}+\frac{2}{\mathrm{e}}+1\right]$． ……………………………………………………12 分

22. [选修 4－4：坐标系与参数方程]

已知圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+4\cos\beta\\ y=1+4\sin\beta\end{cases}$ (β 为参数)，以坐标原点为极点， x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求圆 C 的极坐标方程；

(2)若直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数， α 为直线 l 的倾斜角)，l 与 C 交于 A，B 两点，

$|AB|=2\sqrt{14}$，求 l 的斜率.

【解析】(I) 圆 C 的直角方程为 $(x+1)^2+(y-1)^2=16$ 将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$， $x^2+y^2=\rho^2$

得 $\rho^2+2\rho(\cos\theta-\sin\theta)-14=0$.

故圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho(\cos\theta-\sin\theta)-14=0$……………………………………4 分

(II) 在极坐标系中，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathrm{R})$，

设 A，B 所对应的极径分别为 ρ_1,ρ_2.

将 l 的极坐标方程代入 C 的极坐标方程得 $\rho^2+2\rho(\cos\theta-\sin\theta)-14=0$.

于是 $\rho_1+\rho_2=\sin\alpha-\cos\alpha,\rho_1\rho_2=-14$

$|AB|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2}=\sqrt{57-\sin 2\alpha}=2\sqrt{14}$

得 $\sin 2\alpha=1,2\alpha=\dfrac{\pi}{2},\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 所以 l 的斜率为 1.……………………………………………10 分

23．已知函数 $f(x)=|x-2|$.

(1)求不等式 $f(x)\geq 2x-5$ 的解集；

(2)若 $f(x)\geq 3-|x+a|$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【答案】(1) $(-\infty,3]$

(2) $(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$.

【分析】(1) 绝对值不等式分类讨论求解即可得；

(2) 双绝对值不等式恒成立问题，借助绝对值三角不等式，将原问题转化即可得.

【详解】(1) $f(x)\geq 2x-5$ 等价于 $\begin{cases}x-2\geq 0\\ x-2\geq 2x-5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-2<0\\ -(x-2)\geq 2x-5\end{cases}$，

解得 $2\leq x\leq 3$ 或 $x<2$，

即 $x\leq 3$，即不等式 $f(x)\geq 2x-5$ 的解集为 $(-\infty,3]$；…………………………………………………5 分

(2) $f(x)\geq 3-|x+a|$ 恒成立，即 $|x-2|+|x+a|\geq 3$ 恒成立，

因为 $|x-2|+|x+a|\geq|x-2-(x+a)|=|2+a|$，

所以 $|2+a|\geq 3$，解得 $a\geq 1$ 或 $a\leq -5$，

即 a 的取值范围是 $(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$……………………………………………………………...10 分