

株洲市 2024 届高三年级教学质量统一检测（一）

数学答案及评分标准

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。
满分 150 分，考试时间 120 分钟

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	A	B	D	D	B

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.）

题号	9	10	11	12
答案	AD	AC	BCD	ABC

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

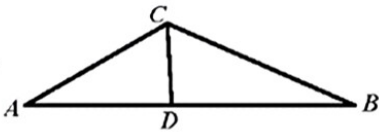
题号	13	14	15	16
答案	0	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 10 分）

解：（1）在 $\triangle BCD$ 中，因为 $BC = 2\sqrt{5}$ ， $CD = 2$ ， $\triangle BCD$ 的面积为 4，

所以 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{5} \times \sin \angle BCD = 4$ ，所以 $\sin \angle BCD = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，.....3 分



因为 $\angle BCD$ 为锐角，所以 $\cos \angle BCD = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，.....5 分（没说明 $\angle BCD$ 为锐角，扣 1 分）

（2）在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理 $BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC \cdot DC \cdot \cos \angle BCD = 16$ ，则 $BD = 4$ ，.....7 分

因为 $BD^2 + DC^2 = BC^2$ ，所以 $\angle BDC = 90^\circ$ ，.....8 分

所以 $AC = \frac{CD}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$10 分

18. (本小题满分 12 分)

解: (1) $\because E$ 为 BC 的中点, $\therefore AD=BE$, 又 $AD \parallel BE$,

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 为平行四边形, $\therefore AB \parallel DE$,1 分

又 $\because AB \perp AD$, $\therefore AD \perp DE$ 2 分

又 $\because \angle ADP = 90^\circ$, $DP \cap DE = D$, $\therefore AD \perp$ 平面 PDE 4 分

又 $AD \subset$ 平面 PDA , $\therefore$ 平面 $PDA \perp$ 平面 PDE 5 分



(2) 由 (1) 可知, $DE \perp BC$, $\therefore DE \perp BE$, $DE \perp PE$, 又 $AD \perp PE$, $AD \cap DE = D$

$\therefore PE \perp$ 平面 $ABED$, $\therefore PE \perp BE$,6 分

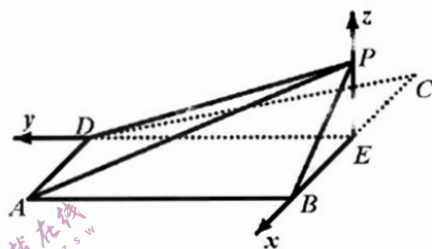
以 EB , ED , EP 为 x , y , z , 轴建立空间直角坐标系 $E-xyz$,

设 $AD=1$, 则 $D(0,2,0)$, $P(0,0,1)$, $A(1,2,0)$,7 分

平面 BEP 的一个法向量为 $\overrightarrow{ED} = (0,2,0)$,8 分

设平面 PDA 的一个法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$,

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -2y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, 取 $y=1$, 则 $\vec{n} = (0,1,2)$,10 分



设平面 PDA 与平面 PBE 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{ED} \rangle \right| = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 12 分

19. (本小题满分 12 分)

解: (1) 前 6 项所成等差数列的公差为 d , 则 $a_5 = -2 + 3d$, $a_6 = -2 + 4d$,1 分

$\because a_5, a_6, a_7$ 成等比数列, $\therefore a_6^2 = a_5 \cdot a_7$, 即 $(-2 + 4d)^2 = 4(-2 + 3d)$,2 分

化简得: $4d^2 - 7d + 3 = 0$, 解得: $d=1$ 或 $d=\frac{3}{4}$ 3 分

又 $\because a_n$ 为整数, $\therefore d=1$,4 分

$\therefore a_n = \begin{cases} n-4, n \leq 5 \\ 2^{n-5}, n > 5 \end{cases}$ (或 $a_n = \begin{cases} n-4, n \leq 6 \\ 2^{n-5}, n > 6 \end{cases}$)6 分

(2) 依题意 $a_1 = -3$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$, $a_4 = 0$, $a_5 = 1$, $a_6 = 2$

当 $m=1$ 时, $a_1+a_2+a_3=-6=a_1a_2a_3$; 当 $m=2$ 时, $a_2+a_3+a_4=-3$; $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4=0$;

当 $m=3$ 时, $a_3+a_4+a_5=a_3a_4a_5=0$; 当 $m=4$ 时, $a_4+a_5+a_6=3$; $a_4 \cdot a_5 \cdot a_6=0$;

$\therefore m=1$ 或 $m=3$ 符合题意;9 分

当 $m \geq 5$ 时, 若存在正整数 m , 使得 $a_m+a_{m+1}+a_{m+2}=a_ma_{m+1}a_{m+2}$,

则 $2^{m-5}+2^{m-4}+2^{m-3}=2^{m-5} \cdot 2^{m-4} \cdot 2^{m-3}$,10 分

即 $1+2+2^2=2^{2m-7}$, 即 $2^{2m-7}=7$

$\therefore 2^{2m-7}$ 为偶数, 7 为奇数, 所以方程无解, 即 $m \geq 5$ 时, 不存在 m 符合题意

综上所述: $m=1$ 或 $m=3$12 分

20. (本小题满分 12 分)

解: (1) $f'(x)=(1+bx+ab)e^{bx}$,1 分

依题意 $\begin{cases} f'(1)=e \\ f(1)=0 \end{cases}$, $\therefore \begin{cases} (1+b+ab)e^b=e \\ (1+a)e^b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$ 3 分

$\therefore f(x)=(x-1)e^x$, $f'(x)=xe^x$.

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,4 分

$\therefore f(x)_{\min}=f(0)=-1$5 分

(2) 方程 $f(x)=kx^2-2$, 即为 $(x-1)e^x-kx^2+2=0$, 设函数 $g(x)=(x-1)e^x-kx^2+2(x>0)$.

则 $g'(x)=xe^x-2kx=x(e^x-2k)$. 由 $g'(x)=0$, 解得 $x=0$, 或 $x=\ln(2k)$ 6 分

当 $x \in (0, \ln(2k))$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 在 $(0, \ln(2k))$ 单调递减,

当 $x \in (\ln(2k), +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 在 $(\ln(2k), +\infty)$ 上单调递增.8 分

由 $k > 2$, 得 $\ln(2k) > \ln 4 > 1$. 又因为 $g(1)=-k+2 < 0$, 所以 $g(\ln(2k)) < 0$.

不妨设 $x_1 < x_2$ (其中 x_1, x_2 为 $f(x)=kx^2-2$ 的两个正实数根),

因为函数 $g(x)$ 在 $(0, \ln(2k))$ 单调递减, 且 $g(0)=1 > 0$, $g(1)=-k+2 < 0$, 所以 $0 < x_1 < 1$ 10 分

同理根据函数 $g(x)$ 在 $(\ln(2k), +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(\ln(2k)) < 0$,

可得 $x_2 > \ln(2k) > \ln 4$, 所以 $|x_1-x_2|=x_2-x_1 > \ln 4-1=\ln \frac{4}{e}$, 即 $|x_1-x_2| > \ln \frac{4}{e}$12 分

21. (本小题满分 12 分)

解: (1) $\because$ 点 $P(2, 4)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上, $\therefore 4^2 = 4p, p = 4$ 1 分

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, PA 的斜率为 k , $\because PM = PN$, $\therefore PB$ 的斜率为 $-k$,2 分

$$\text{即 } \frac{y_1 - 4}{x_1 - 2} = -\frac{y_2 - 4}{x_2 - 2}, \because x_1 = \frac{y_1^2}{8}, x_2 = \frac{y_2^2}{8},$$

$$\therefore \frac{y_1 - 4}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 4}{x_2 - 2} = \frac{8}{y_1 + 4} + \frac{8}{y_2 + 4} = 0, \text{ 得 } y_1 + y_2 = -8, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8}{y_1 + y_2} = -1, \text{ 直线 } AB \text{ 的斜率为 } -1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由 (1) 可设直线 AB 的方程为 $x = -y + b$, 联立 $\begin{cases} y^2 = 8x \\ x = -y + b \end{cases}$, 得 $y^2 + 8y - 8b = 0$

$\Delta > 0$, 得 $b > -2$, $y_1 + y_2 = -8$, $y_1 y_2 = -8b$ 6 分

又 $\because y_1 < 0, y_2 < 0$, $\therefore -2 < b < 0$ 7 分

$$|AB| = \sqrt{2} |y_1 - y_2| = \sqrt{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = 8\sqrt{2 + b} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设点 P 到直线 AB 的距离为 d , 则 $d = \frac{|6 - b|}{\sqrt{2}}$

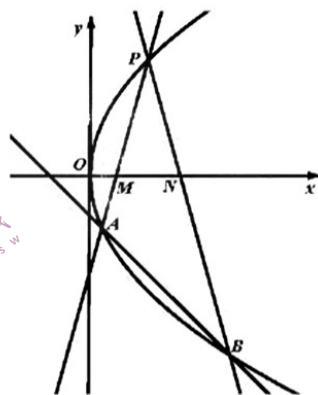
$$\therefore \Delta PAB \text{ 的面积为 } S_{\Delta PAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = 2\sqrt{2} |6 - b| \sqrt{2 + b} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

设 $f(b) = 8(6 - b)^2(2 + b) \quad (-2 < b < 0)$, 则 $f'(b) = 8(b - 6)(3b - 2) > 0$

$\therefore f(b)$ 在 $(-2, 0)$ 上单调递增,10 分

$\therefore f(-2) < f(b) < f(0)$, 即 $0 < f(b) < 576$,11 分

$\therefore 0 < S_{\Delta PAB} < 24$, 即 ΔPAB 面积的取值范围为 $(0, 24)$12 分



22. (本小题满分 12 分)

解: (1) 当 $n = 3$ 时,

a_1	1	1	2	2	3	3
a_2	2	3	1	3	1	2
a_3	3	2	3	1	2	1
X	0	2	2	4	4	4

$\therefore X$ 的可能取值集合为 $\{0, 2, 4\}$,1 分

$$P(X=0)=\frac{1}{6}, \quad P(X=2)=\frac{1}{3}, \quad P(X=4)=\frac{1}{2}, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	2	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

.....5 分

(2) ①当 $n=4$ 时,

α_1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
α_2	2	2	3	3	4	4	1	1	3	3	4	4
α_3	3	4	2	4	2	3	3	4	1	4	1	3
α_4	4	3	4	2	3	2	4	3	4	1	3	1
X	0	2	2	4	4	4	2	4	4	6	6	6
α_1	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
α_2	1	1	2	2	4	4	1	1	2	2	3	3
α_3	2	4	1	4	1	2	2	3	1	3	1	2
α_4	4	2	4	1	2	1	3	2	3	1	2	1
X	4	6	4	6	8	8	6	6	6	8	8	8

$\therefore X$ 的可能取值集合为 $\{0, 2, 4, 6, 8\}$,6 分

$$P(X=0)=\frac{1}{24}, \quad P(X=2)=\frac{3}{24}, \quad P(X=4)=\frac{7}{24}, \quad P(X=6)=\frac{9}{24}, \quad P(X=8)=\frac{4}{24},$$

$$\therefore P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=2) = \frac{1}{6}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设三轮测试都有 $X \leq 2$ 的概率为 P ,

$$\because \text{三轮测试相互独立}, \therefore P = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

②由于 $P = \frac{1}{216} < \frac{5}{1000}$ 是一个很小的概率, 表明仅凭随机猜测得到三轮测试都有 $X < 1$ 的可能性很小,

$\therefore$ 可以认为该品酒师有良好的鉴别能力, 不是靠猜测得到结果.12 分

(注明: 第②小问, 利用随机变量 X 的数学期望来判断, 给 1 分)