数学参考答案

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	B	C	A	B	C	C	D	A	AC	BCD	ABC	ACD

1. B 【解析】因为 $A\cup B=\{-1,1,9\}$,$B=\{-1,9\}$,所以 $1\in A$,

当 $a^2=1$ 时,$a=\pm1$,根据元素的互异性可知,$a=1$;

当 $-a=1$ 时,$a=-1$,不满足元素的互异性,舍去,故选 B.

2. C 【解析】因为 $z=\dfrac{1-i}{i-2i^2-i^3}=\dfrac{1-i}{2+2i}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(1-i)^2}{2}=-\dfrac{1}{2}i$,所以 $\bar{z}=\dfrac{1}{2}i$,所以 $\bar{z}$ 的虚部为 $\dfrac{1}{2}$,故选 C.

3. A 【解析】二项式 $\left(\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{1}{x^4}\right)^7$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_7^r x^{\frac{2}{3}(7-r)}\cdot(-x^{-4})^r=(-1)^r C_7^r x^{\frac{14-14r}{3}}$,

令 $\dfrac{14-14r}{3}=0$,解得 $r=1$,所以二项式 $\left(\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{1}{x^4}\right)^7$ 展开式中常数项为 $T_2=(-1)C_7^1=-7$,故选 A.

4. B 【解析】因为 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,

即 $\dfrac{-(a-1)x^3+(2-a)x^2}{2^{-x}+2^x}=\dfrac{(a-1)x^3+(2-a)x^2}{2^x+2^{-x}}$,整理得 $2(a-1)x^3=0$ 恒成立,

所以 $2(a-1)=0$,则 $a=1$,故选 B.

5. C 【解析】易知直线 $y=3x+3a$ 经过 C 的左顶点 $A(-a,0)$,

设 $F(-c,0)$,因为 $BF\perp x$ 轴,所以 $\dfrac{c^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,解得 $y=-\dfrac{b^2}{a}$,或 $y=\dfrac{b^2}{a}$(舍去),

所以点 B 坐标为 $\left(-c,-\dfrac{b^2}{a}\right)$,则 $-\dfrac{b^2}{a}=-3c+3a$,整理得 $3ac-3a^2=b^2$,

所以 $3ac-3a^2=c^2-a^2$,即 $c^2-3ac+2a^2=0$,解得 $c=a$(舍去),或 $c=2a$,

所以 C 的离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=2$,故选 C.

6. C 【解析】$f'(x)=-\sin x+\dfrac{a}{x}=\dfrac{a-x\sin x}{x}\geqslant0$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立,即 $a\geqslant x\sin x$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立,

设 $g(x)=x\sin x$,$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,则 $g'(x)=\sin x+x\cos x>0$,所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,则 $g(x)<g(x)_{\max}=\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $a\geqslant\dfrac{\pi}{2}$,则 a 的最小值为 $\dfrac{\pi}{2}$,故选 C.

7. D 【解析】由 $\sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 得,$\sin^2\alpha+\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{3}$,

由 $\cos\alpha-\sin\beta=-\dfrac{1}{3}$ 得,$\cos^2\alpha+\sin^2\beta-2\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{9}$,

两式相加得,$2+2(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=\dfrac{4}{9}$,

则 $\sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{7}{9}$,

所以 $\cos(2\alpha-2\beta)=1-2\sin^2(\alpha-\beta)=1-2\times\left(-\dfrac{7}{9}\right)^2=-\dfrac{17}{81}$,故选 D.

8. A 【解析】数列 $\{b_n\}$ 为:$a_1,a_1-1,a_2,a_2-\dfrac{1}{2},a_2-1,a_3,a_3-\dfrac{1}{3},a_3-\dfrac{2}{3},a_3-1,\cdots,a_n,a_n-\dfrac{1}{n}$,

$a_n-\dfrac{2}{n},a_n-\dfrac{3}{n},\cdots,a_n-\dfrac{n-1}{n},a_n-1,a_{n+1},\cdots$,

设 a_n 及其后面 n 项的和为 S_n,则 $S_n=(n+1)a_n-\dfrac{n(n+1)}{2}\times\dfrac{1}{n}=2-\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{1}{2}(3-n)$,

所以数列 $\{S_n\}$ 是以 1 为首项、公差为 $-\dfrac{1}{2}$ 的等差数列.

1
官方微信公众号:zizzsw 咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com 微信客服:zizzs2018

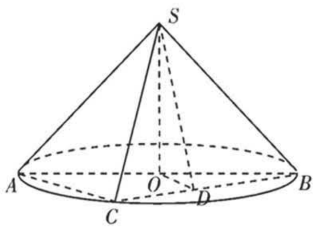
所以$\{b_n\}$前65项的和为$S_1+S_2+\cdots+S_{10}=\dfrac{10\left(1-\dfrac{7}{2}\right)}{2}=-\dfrac{25}{2}$，故选A.

二、选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. AC 【解析】如图，因为$\angle SAB=45°$，所以$\triangle SAB$为等腰直角三角形，

又$SC=\sqrt{2}$，则$SA=SB=\sqrt{2}$，所以$AB=\sqrt{SA^2+SB^2}=2$，则$r=AO=SO=1$，

所以该圆锥的体积为$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2\cdot SO=\dfrac{\pi}{3}$，A正确；



易知$\triangle ABC$为直角三角形，且$\angle ACB=90°$，又$\angle BAC=60°$，则$\angle ABC=30°$，

所以$AC=\dfrac{1}{2}AB=1$，B错误；

该圆锥的侧面展开图为一扇形，其弧长为$l=2\pi$，半径为$R=SA=\sqrt{2}$，设其圆心角为α，

所以$\alpha=\dfrac{l}{R}=\sqrt{2}\pi>\pi$，所以该圆锥的侧面展开图的圆心角大于180°，C正确；

取BC的中点D，连接SD,OD，则$SD\perp BC$，OD为$\triangle ABC$的中位线，

所以$OD\perp BC, OD=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}$，

所以$\angle ODS$为二面角$A-BC-S$的平面角，

易知$\triangle SOD$为直角三角形，所以$\tan\angle ODS=\dfrac{SO}{OD}=2$，D错误，故选AC.

10. BCD 【解析】易知直线$y=x+\sqrt{2}$经过C的焦点$F_1(-\sqrt{2},0)$和顶点$B(0,\sqrt{2})$，所以$b=\sqrt{2}, c=\sqrt{2}$，则$a=\sqrt{b^2+c^2}=2$，所以$a=\sqrt{2}b$，A错误；

由椭圆的定义可知，$\triangle ABF_2$的周长为$4a=8$. B正确；

由上可知C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1,\\ y=x+\sqrt{2},\end{cases}$解得$x_1=0, x_2=-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$，则$A\left(-\dfrac{4}{3}\sqrt{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$，$B(0,\sqrt{2})$，

所以$|AB|=\sqrt{\left(-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}-0\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{8}{3}$，C正确；

由$|BF_1|=|BF_2|=2, |F_1F_2|=2\sqrt{2}$得，$|BF_1|^2+|BF_2|^2=|F_1F_2|^2$，所以$\angle F_1BF_2=90°$，

则以AF_2为直径的圆过点B，D正确，故选BCD.

11. ABC 【解析】$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，则$x=c>0$，

$f'(x)=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2}$，

由题意可知，$x=c$是方程$ax^2+bx+c=0$的一个变号实数根，则$\Delta=b^2-4ac>0$，A正确；

由$ac^2+bc+c=0$得，$ac+b=-1$，B正确；

当$a<0$时，因为$c>0$，所以函数$y=ax^2+bx+c$开口向下，且与x轴正半轴只有一个交点，

当$x\in(0,c)$时，$f'(x)>0$，当$x\in(c,+\infty)$时，$f'(x)<0$，

所以$f(x)$在$(0,c)$上单调递增，在$(c,+\infty)$上单调递减，

则$f(x)$有且仅有一个极大值，C正确；

将$b=-1-ac$代入$ax^2+bx+c=0$整理得$\left(x-\dfrac{1}{a}\right)(x-c)=0$，则方程有不相等的实数根$\dfrac{1}{a}$与$c$，即$\dfrac{1}{a}\neq c$，

官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

当 $0<\frac{1}{a}<c$ 时，$x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)\cup(c,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in\left(\frac{1}{a},c\right)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，$(c,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},c\right)$ 上单调递减，则 $x=\frac{1}{a}$ 是 $f(x)$ 的极大值点，$x=c$ 是 $f(x)$ 的极小值点，

当 $0<c<\frac{1}{a}$ 时，$x\in(0,c)\cup\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in\left(c,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,c)$，$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(c,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，则 $x=c$ 是 $f(x)$ 的极大值点，$x=\frac{1}{a}$ 是 $f(x)$ 的极小值点，可见 D 错误，故选 ABC.

12. ACD 【解析】设 $A_{红}$，$A_{黄}$，$A_{绿}$ 分别表示先抽到的小球的颜色分别是红、黄、绿的事件，设 $B_{红}$ 表示再抽到的小球的颜色是红的事件，

在甲先抽取的是黄球的条件下，甲获得奖品的概率为 $P(B_{红}|A_{黄})=\frac{4}{7}$，A 正确；

在甲先抽取的不是红球的条件下，

甲没有获得奖品的概率为 $P(\overline{B_{红}}|\overline{A_{红}})=\frac{P(\overline{A_{红}}\,\overline{B_{红}})}{P(\overline{A_{红}})}=\frac{P(A_{黄}\overline{B_{红}})+P(A_{绿}\overline{B_{红}})}{P(\overline{A_{红}})}=\frac{\frac{2}{7}\times\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}}{\frac{4}{7}}=\frac{13}{28}$，B 错误；

由题意可知，$P(A_{红})=\frac{3}{7}$，$P(A_{黄})=\frac{2}{7}$，$P(A_{绿})=\frac{2}{7}$，$P(B_{红}|A_{红})=\frac{3}{7}$，$P(B_{红}|A_{黄})=\frac{4}{7}$，$P(B_{红}|A_{绿})=\frac{1}{2}$，

由全概率公式可知，甲获得奖品的概率为

$P=P(A_{红})P(B_{红}|A_{红})+P(A_{黄})P(B_{红}|A_{黄})+P(A_{绿})P(B_{红}|A_{绿})=\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\times\frac{4}{7}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{24}{49}$，C 正确；

因为甲获奖时红球取自哪个箱子的颜色与先抽取小球的颜色相同，则

$P(A_{红}|B_{红})=\frac{P(A_{红})\cdot P(B_{红}|A_{红})}{P(B_{红})}=\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{49}{24}=\frac{3}{8}$；

$P(A_{黄}|B_{红})=\frac{P(A_{黄})\cdot P(B_{红}|A_{黄})}{P(B_{红})}=\frac{2}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{49}{24}=\frac{1}{3}$；

$P(A_{绿}|B_{红})=\frac{P(A_{绿})\cdot P(B_{红}|A_{绿})}{P(B_{红})}=\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{49}{24}=\frac{7}{24}$，

所以甲获得奖品时，甲先抽取绿球的机会最小，D 正确，故选 ACD.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{1}{2}$ 【解析】由 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$ 得，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，由 $|2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$ 得，$4\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}^2=4\boldsymbol{b}^2$，则 $4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2=2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$.

14. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$ 【解析】设该正三棱台侧面的高为 h，由题意可知，$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+3\sqrt{3})\cdot h=2\sqrt{6}$，所以 $h=\sqrt{2}$，

该正三棱台的上底面的面积为 $\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}\sqrt{3}$，下底面的面积为 $\frac{1}{2}\times(3\sqrt{3})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{27\sqrt{3}}{4}$，高为 $\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}\right)^2}=1$，

故该正三棱台的体积为 $V=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{27\sqrt{3}}{4}+\sqrt{\frac{3}{4}\sqrt{3}\times\frac{27\sqrt{3}}{4}}\right)\times1=\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

15. 1（或 -3，或 $-1\pm2\sqrt{3}$） 【解析】由 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$ 可知，$\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2\sin\angle ACB=2\sqrt{3}$，解得 $\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

则 $\angle ACB=60^\circ$ 或 $\angle ACB=120^\circ$，

易知圆心 C 到直线 AB 的距离为 $d=\sqrt{6}$ 或 $d=\sqrt{2}$，

由点到直线的距离公式可知，$\frac{|m+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$，或 $\frac{|m+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

解得 $m=-1\pm2\sqrt{3}$ 或 $m=1$ 或 $m=-3$.

16. $\left[\frac{51}{16},4\right]$ 【解析】由图可知，$\begin{cases}A+B=3,\\-A+B=-1,\end{cases}$ 解得 $A=2$，$B=1$，

官方微信公众号：zizzsw
官方网站：www.zizzs.com
咨询热线：010-5601 9830
微信客服：zizzs2018

由图可知，$2\sin\varphi+1=2$，解得 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，

又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 或 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$，

由点 $(0,2)$ 在函数 $f(x)$ 的单调递减区间上，所以 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$，

则 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{5\pi}{6}\right)+1$.

令 $f(x)=0$，即 $\sin\left(\omega x+\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，解得 $x_1=\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{3\omega}$，$x_2=\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，

由 $|MN|=\frac{3}{2}$ 得，$|x_1-x_2|=\frac{2\pi}{3\omega}=\frac{3}{2}$，解得 $\omega=\frac{4\pi}{9}$.

所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{4\pi}{9}x+\frac{5\pi}{6}\right)+1$.

由 $f(x)\geqslant 1+\sqrt{2}$ 得，$\sin\left(\frac{4\pi}{9}x+\frac{5\pi}{6}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{4\pi}{9}x+\frac{5\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\frac{9}{2}k-\frac{21}{16}\leqslant x\leqslant\frac{9}{2}k-\frac{3}{16}$，$k\in\mathbf{Z}$，

又 $x\in[0,4]$，取 $k=1$，则 $\frac{51}{16}\leqslant x\leqslant 4$，故不等式 $f(x)\geqslant 1+\sqrt{2}$ 在区间 $[0,4]$ 上的解集为 $\left[\frac{51}{16},4\right]$.

四、解答题：本大题共 6 个小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1) 由 $\tan B=\frac{1}{3}\tan C$ 得，$\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{3\cos C}$，…………(1 分)

所以 $3\sin B\cos C=\sin C\cos B$，…………(2 分)

由正、余弦定理得，$3b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，…………(3 分)

整理得，$4(c^2-b^2)=2a^2$，…………(4 分)

所以 $\frac{c^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$.…………(5 分)

(2) 由 $a=\sqrt{6}$，且 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+\sqrt{6}$ 得，$b+c=3$　①；

由 (1) 可知，$c^2-b^2=3$，则 $c-b=1$　②，…………(6 分)

由①②解得 $c=2$，$b=1$.…………(7 分)

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\times1\times2}=-\frac{1}{4}$，…………(8 分)

则 $\sin A=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，…………(9 分)

故边 b 上的高为 $h=c\sin A=2\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{2}$.…………(10 分)

18.【解析】(1) 由 $2S_n=(3^n-1)a_n$ 得，当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=(3^{n-1}-1)a_{n-1}$，…………(1 分)

两式相减得，$2S_n-2S_{n-1}=(3^n-1)a_n-(3^{n-1}-1)a_{n-1}$，

整理得，$(3^n-3)a_n-(3^{n-1}-1)a_{n-1}=0$，…………(2 分)

所以 $3a_n-a_{n-1}=0$，即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{3}$，…………(3 分)

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{3}$ 为首项，$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$.…………(4 分)

(2) 由 (1) 可知，$a_{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$，

$S_n=\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$，所以 $S_{n+1}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$，…………(6 分)

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

所以 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{(1-a_n)S_{n+1}}=\dfrac{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}=\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}-\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$； ………………………………（7分）

所以

$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left[\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^1}-\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right]+\left[\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}-\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^3}\right]+\cdots+\left[\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}-\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}\right]=$

$\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^1}-\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$， ………………………………（10分）

因为 $\dfrac{8}{9}\leqslant1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$，所以 $\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}\leqslant\dfrac{9}{8}$，则 $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}\geqslant\dfrac{3}{8}$， ………………………………（11分）

故 $T_n\geqslant\dfrac{3}{8}$. ………………………………（12分）

19.【解析】(1)从医学指标在[25,50)的志愿者中，按接种 A、B 疫苗分层抽取8人中，接种 A 疫苗有2人，接种 B 疫苗有6人. ………………………………（1分）

由题意可知，X 可能取值为2,3,4.

$P(X=2)=\dfrac{C_2^2C_6^2}{C_8^4}=\dfrac{3}{14}$，$P(X=3)=\dfrac{C_2^1C_6^3}{C_8^4}=\dfrac{4}{7}$，$P(X=4)=\dfrac{C_2^0C_6^4}{C_8^4}=\dfrac{3}{14}$， ………………………………（3分）

X 的分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$

………………………………（4分）

则 $E(X)=2\times\dfrac{3}{14}+3\times\dfrac{4}{7}+4\times\dfrac{3}{14}=3$. ………………………………（5分）

(2)2×2列联表如下：

疫苗	抗体		合计
	抗体弱	抗体强	
A 疫苗	$20+m$	$80-m$	100
B 疫苗	$40-m$	$60+m$	100
合计	60	140	200

………………………………（7分）

则 $\chi^2=\dfrac{200\left[(80-m)(40-m)-(60+m)(20+m)\right]^2}{100\times100\times140\times60}=\dfrac{2(10-m)^2}{21}$， ………………………………（8分）

由题意可知，$\dfrac{2(10-m)^2}{21}\geqslant x_{0.025}=5.024$， ………………………………（9分）

整理得，$(10-m)^2\geqslant52.752$，

解得 $m\leqslant2$ 或 $m\geqslant18$，$m\in\mathbf{N}$， ………………………………（11分）

又 $10-m\geqslant0$，$m\in\mathbf{N}$，则 $m\leqslant10$，$m\in\mathbf{N}$，

所以 $m\leqslant2$，$m\in\mathbf{N}$，

故 m 的最大值为2. ………………………………（12分）

20.【解析】(1)证明：设 $\overrightarrow{C_1D}=t\overrightarrow{C_1B_1}(0\leqslant t\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1D}=\overrightarrow{CC_1}+t\overrightarrow{C_1B_1}$，

$\overrightarrow{C_1B}=\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{B_1B}=\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{C_1B_1}-\overrightarrow{CC_1}$， ………………………………（1分）

所以 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{C_1B}=(\overrightarrow{CC_1}+t\overrightarrow{C_1B_1})\cdot(\overrightarrow{C_1B_1}-\overrightarrow{CC_1})=(1-t)\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}-\overrightarrow{CC_1}^2+t\overrightarrow{C_1B_1}^2$， ………………………………（2分）

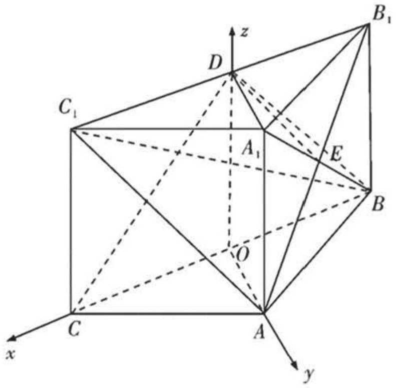
因为 $CD\perp BC_1$，$CC_1\perp C_1B_1$，$BC=\sqrt{2}AA_1$，

所以 $(2t-1)AA_1^2=0$，

解得 $t=\dfrac{1}{2}$，则点 D 为 B_1C_1 的中点. ………………………………（3分）

5
官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

连接 AB_1，设 $A_1B\cap AB_1=E$，连接 DE，…………（4 分）
因为四边形 ABB_1A_1 为矩形，所以 E 为 AB_1 的中点，
在 $\triangle AB_1C_1$ 中，DE 为中位线，所以 $DE/\!/AC_1$，…………（5 分）
又 $AC_1\not\subset$ 平面 A_1BD，$DE\subset$ 平面 A_1BD，
所以 $AC_1/\!/$ 平面 A_1BD. …………（6 分）
(2)取 BC 的中点 O，连接 OD，OA，则 $DO/\!/BB_1$，所以 $OD\perp BC$，
由 $AC=AB$ 可知，$AO\perp BC$，
易知四边形 AA_1DO 为平行四边形，
又 $AA_1\perp$ 平面 ABC，所以 $DO\perp$ 平面 ABC，所以 $DO\perp OA$. …………（7 分）



以 O 为坐标原点，分别以 OC，OA，OD 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.
设 $OA=m(m>0)$，$BC=\sqrt{2}AA_1=\sqrt{2}a(a>0)$，所以 $CC_1=a$，$BC=\sqrt{2}a$，
则 $A_1(0,m,a)$，$B\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$D(0,0,a)$，$C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，
所以 $\overrightarrow{DA_1}=(0,m,0)$，$\overrightarrow{DB}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,-a\right)$，$\overrightarrow{DC}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,-a\right)$，…………（8 分）
设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，
由 $\begin{cases}\overrightarrow{DA_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}my=0,\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}ax-az=0,\end{cases}$ 取 $x=\sqrt{2}$，则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,-1)$，…………（10 分）
设直线 CD 与平面 A_1BD 所成角为 θ，
则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{DC},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{2a}{\sqrt{\dfrac{3}{2}}a\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. …………（11 分）
故直线 CD 与平面 A_1BD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. …………（12 分）

21.【解析】(1)因为 $A_1(2,1)$ 关于 y 轴对称的点为 $A_1'(-2,1)$，所以抛物线 E 经过 A_1，A_2 两点中的一点，
由题意可知，抛物线 E 经过 $A_3\left(-1,\dfrac{1}{4}\right)$，…………（1 分）
当抛物线 E 的方程为 $y^2=-2px(p>0)$ 时，将点 $A_3\left(-1,\dfrac{1}{4}\right)$ 代入 E 的方程得，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=-2p\times(-1)$，解得 $p=\dfrac{1}{32}$，
验证可知，抛物线 E：$y^2=-\dfrac{1}{16}x$ 不经过点 A_1，A_2，不满足题意；…………（2 分）
当抛物线 E 的方程为 $x^2=2py(p>0)$ 时，将点 $A_3\left(-1,\dfrac{1}{4}\right)$ 代入 E 的方程得，$(-1)^2=2p\times\dfrac{1}{4}$，解得 $p=2$，
验证可知，抛物线 E：$x^2=4y$ 经过点 A_1，不经过点 A_2，满足题意，…………（3 分）
故抛物线 E 的方程为 $x^2=4y$. …………（4 分）
(2)由(1)可知，$F(0,1)$，
设 BC 的方程为 $y=kx+1(k\neq0)$，设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，
由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ x^2=4y,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$，

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

$x_1+x_2=4k,x_1x_2=-4$，……（5分）

因为 $|\alpha-\beta|=90°$，所以 $BC\perp PQ$，

设 $P(x_3,y_3),Q(x_4,y_4)$，

同理可知，$x_3+x_4=-\dfrac{4}{k},x_3x_4=-4$.

直线 BP 的斜率为 $k_{BP}=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\dfrac{\frac{x_3^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}{x_3-x_1}=\dfrac{x_3+x_1}{4}$，其方程 $y-\dfrac{x_1^2}{4}=\dfrac{x_3+x_1}{4}(x-x_1)$，

即 $y=\dfrac{x_3+x_1}{4}x-\dfrac{x_1x_3}{4}$ ①. ……（6分）

同理可知直线 CQ 的方程 $y=\dfrac{x_4+x_2}{4}x-\dfrac{x_2x_4}{4}$，

即 $y=\dfrac{-\frac{4}{x_3}-\frac{4}{x_1}}{4}x-\dfrac{\left(-\frac{4}{x_3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{x_1}\right)}{4}=-\dfrac{x_1+x_3}{x_1x_3}x-\dfrac{4}{x_1x_3}$ ②，

由①②解得，$y=-1$，……（7分）

所以点 M 在直线 $y=-1$ 上，由 $MN\perp y$ 轴可知，点 N 在直线 $y=-1$ 上，

设 $N(x_0,-1)$，由 $ON/\!/PQ$ 可知，$ON\perp BC$，则 $k_{ON}\cdot k_{BC}=-1$，所以 $-\dfrac{1}{x_0}=-\dfrac{1}{k}$，

解得 $x_0=k$，……（8分）

由上可知，$|BC|=y_1+y_2+2=k(x_1+x_2)+4=4k^2+4$，

原点 O 到直线 BC 的距离为 $d_1=\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$，

N 到直线 BC 的距离为 $d_2=\dfrac{|k^2+2|}{\sqrt{k^2+1}}$，

所以 $m=\dfrac{1}{2}|BC|\cdot d_2=2|k^2+2|\sqrt{k^2+1}$，$n=\dfrac{1}{2}|BC|\cdot d_1=2\sqrt{k^2+1}$，……（9分）

则 $\dfrac{m-n}{mn}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{2\sqrt{k^2+1}}-\dfrac{1}{2|k^2+2|\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{k^2+1}{2(k^2+2)\sqrt{k^2+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{k^2+1}}{2(k^2+2)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}+\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}}\leqslant\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\sqrt{k^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}}}=\dfrac{1}{4}$，

当且仅当 $\sqrt{k^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$，即 $k=0$ 取得等号，……（11分）

因为 $k\neq0$，所以 $\dfrac{m-n}{mn}<\dfrac{1}{4}$，

由 $m-n>0$ 得，$0<\dfrac{m-n}{mn}<\dfrac{1}{4}$，

故 $\dfrac{m-n}{mn}$ 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$. ……（12分）

22.【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{a}{x}-2x-(2-a)=-\dfrac{(2x-a)(x+1)}{x}$，……（1分）

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，此时 $f(x)$ 无极值；……（2分）

当 $a>0$ 时，当 $x\in\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，

故 $f(x)$ 只存在极大值且为 $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4}+a\ln\dfrac{a}{2}-a$. ……（3分）

(2) 由 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$ 为 $f(x)$ 的两个零点得，$a\ln x_1-x_1^2-(2-a)x_1=a\ln x_2-x_2^2-(2-a)x_2$，

所以 $a[(\ln x_2-\ln x_1)+(x_2-x_1)]=x_2^2-x_1^2+2(x_2-x_1)$，

所以 $f'(x_1)+f'(x_2)=\frac{a}{x_1}-2x_1-(2-a)+\frac{a}{x_2}-2x_2-(2-a)=a\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+2\right)-2(x_1+x_2+2)$

$=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+2)}{\ln\frac{x_2}{x_1}+(x_2-x_1)}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+2\right)-2(x_1+x_2+2).$ ………………………………（5 分）

由(1)可知，$f(x)$在$\left(0,\frac{a}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$上单调递减，

若 $x_1,x_2(x_1<x_2)$为 $f(x)$的两个零点，则 $x_1\in\left(0,\frac{a}{2}\right),x_2\in\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$，

所以 $f'(x_1)>0,f'(x_2)<0.$ ………………………………（6 分）

要证$\frac{f'(x_2)}{f'(x_1)}>-1$，需证 $f'(x_1)+f'(x_2)>0$，

需证$\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+2)}{\ln\frac{x_2}{x_1}+(x_2-x_1)}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+2\right)-2(x_1+x_2+2)>0$， ………………………………（7 分）

又 $x_1+x_2+2>0$，

即证$\frac{x_2-x_1}{\ln\frac{x_2}{x_1}+(x_2-x_1)}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+2\right)-2>0$， ………………………………（8 分）

因为 $\ln\frac{x_2}{x_1}+(x_2-x_1)>0$，所以需证$(x_2-x_1)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+2\right)-2\left[\ln\frac{x_2}{x_1}+(x_2-x_1)\right]>0$，

即证$\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}-2\ln\frac{x_2}{x_1}>0$， ………………………………（9 分）

令 $t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$，需证 $t-\frac{1}{t}-2\ln t>0$，

设 $g(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>1)$，则 $g'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$， ………………………………（10 分）

所以 $g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以 $g(t)>g(1)=0$， ………………………………（11 分）

则 $t-\frac{1}{t}-2\ln t>0$，

故$\frac{f'(x_2)}{f'(x_1)}>-1.$ ………………………………（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。