2024年1月“七省联考”押题预测卷05

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\left\{x\middle|\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}\right\}$，$B=\left\{x\middle|\ y=\ln\left(2^x-2\right)\right\}$，则 $A\bigcap B=$（　　）

A. $\left\{x\middle|0<x<\dfrac{3}{2}\right\}$

B. $\left\{x\middle|1<x<\dfrac{3}{2}\right\}$

C. $\left\{x\middle|1\le x<\dfrac{3}{2}\right\}$

D. $\left\{x\middle|\ x<\dfrac{3}{2},x\ne 1\right\}$

【答案】B

【解析】由 $3-2x>0$ 解得 $x<\dfrac{3}{2}$，所以 $A=\left\{x\,|\,x<\dfrac{3}{2}\right\}$，

由 $2^x-2>0$ 解得 $x>1$，所以 $B=\left\{x\,|\,x>1\right\}$，

所以 $A\cap B=\left\{x\middle|1<x<\dfrac{3}{2}\right\}$．

故选：B

2．复数 z 满足 $(1+i)\cdot z=1-i^{2025}$，则 $\overline{z}$ 的虚部为（　　）

A. i　　B. -1　　C. $-i$　　D. 1

【答案】D

【解析】$\because (1+i)\cdot z=1-i^{2025}=1-i$，

$\therefore z=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$，

$\therefore \overline{z}=i$，

所以 $\overline{z}$ 的虚部为1．

故选：D．

3．英国数学家哈利奥特最先使用“<”和“>”符号，并逐渐被数学界接受，不等号的引入对不等式的发展影响深远．对于任意实数 a、b、c、d，下列命题是真命题的是（　　）

A. 若 $a^2<b^2$，则 $a<b$

B. 若 $a<b$，则 $ac<bc$

C. 若 $a<b$，$c<d$，则 $ac<bd$

D. 若 $a<b$，$c<d$，则 $a+c<b+d$

【答案】D

【解析】对A：因为 $a^2<b^2$，可能 $b<a<0$，故错误；

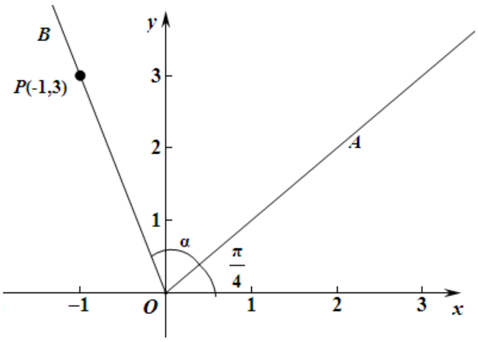
对B：当 $c<0$ 时，若 $a<b$，则 $ac>bc$，故错误；

对C：当 $a<b<0$，$c<d<0$ 时，则 $ac>bd$，故错误；

对 D：若 $a<b$，$c<d$，则 $a+c<b+d$，故正确.

故选：D.

4．如图所示，α 为射线 OA，OB 的夹角，$\angle AOx=\frac{\pi}{4}$，点 $P(-1,3)$ 在射线 OB 上，则 $\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})}{\cos\alpha}=$（　　）



A. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}+1}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$

【答案】A

【解析】设射线 OB 所对的角为 β，则有 $\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，

又因为 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{4}$，

所以 $\alpha=\beta-\frac{\pi}{4}$，

$\sin\alpha=\sin(\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\beta-\cos\beta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\cos(\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{10}$，

所以 $\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})}{\cos\alpha}=\frac{\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

故选：A.

5．下列函数中，既是偶函数又在 $(0,2)$ 上单调递减的是（　　）

A. $y=2^{|x|}$　　B. $y=-x^3$

C. $y=\cos\frac{x}{2}$　　D. $y=\ln\frac{2-x}{2+x}$

【答案】C

【解析】对于 A，函数 $f(x)=2^{|x|}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，

且 $f(-x)=2^{|-x|}=2^{|x|}=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，

当 $x\in(0,2)$ 时 $f(x)=2^{x}$，函数 $f(x)$ 单调递增，故 A 不符合题意；

对于 B，函数 $f(x)=-x^{3}$ 的定义域为 **R**，关于原点对称，

且 $f(-x)=-(-x)^{3}=x^{3}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，

由幂函数的性质知函数 $y=x^{3}$ 在 **R** 上单调递增，

所以函数 $f(x)=-x^{3}$ 在 **R** 上单调递减，故 B 不符合题意；

对于 C，函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 的定义域为 **R**，关于原点对称，

且 $f(-x)=\cos(-\frac{x}{2})=\cos\frac{x}{2}=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，

当 $x\in(0,2)$ 时 $\frac{x}{2}\in(0,1)$，又 $(0,1)\subseteq\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，故 C 符合题意；

对于 D，函数 $f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$ 的定义域为 $(-2,2)$，关于原点对称，

且 $f(-x)=\ln\frac{2+x}{2-x}=\ln(\frac{2-x}{2+x})^{-1}=-\ln\frac{2-x}{2+x}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 是奇函数，又 $f'(x)=\frac{1}{2-x}-\frac{1}{2+x}=\frac{2x}{(2-x)(2+x)}$，

令 $f'(x)<0\Rightarrow-2<x<0$，令 $f'(x)>0\Rightarrow0<x<2$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-2,0)$ 上单调递减，在 $(0,2)$ 上单调递增，故 D 不符合题意.

故选：C.

6．已知圆 $C:(x-1)^{2}+(y-1)^{2}=1$ 上两动点 A，B 满足 $\triangle ABC$ 为正三角形，O 为坐标原点，则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|$ 的最大值为（　　）

A. $2\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】由题可知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形，

设 AB 的中点为 M，则 $\left|CM\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $C\left(1,1\right)$，所以点 M 的轨迹方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{3}{4}$，且 $\left|OC\right|=\sqrt{2}$．

因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$，所以 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=2\left|\overrightarrow{OM}\right|$，

因为 $\left|\overrightarrow{OM}\right|\le\left|OC\right|+\left|MC\right|=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当点 C 在线段 OM 上时等号成立，

所以 $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ 的最大值为 $\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$．

故选：D.

7．现有 4 名男生和 3 名女生计划利用假期到某地景区旅游，由于是旅游的旺季，他们在景区附近订购了一家酒店的 5 间风格不同的房间，并约定每个房间都要住人，但最多住 2 人，男女不同住一个房间，则女生甲和女生乙恰好住在同一间房的概率是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{2}{7}$　　D. $\frac{3}{10}$

【答案】C

【解析】3 名女生需要住 2 个房间或 3 个房间.

若 3 名女生住 2 个房间，则不同的方法种数为 $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{A}_5^5$；

若 3 名女生住 3 个房间，则不同的方法种数为 $\frac{1}{2}\mathrm{C}_4^2\mathrm{A}_5^5$．

其中，女生甲和女生乙恰好住在同一间房的方法种数为 $\mathrm{C}_4^2\mathrm{A}_5^5$，

所以女生甲和女生乙恰好住在同一间房的概率是 $\dfrac{\mathrm{C}_4^2\mathrm{A}_5^5}{\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{A}_5^5+\frac{1}{2}\mathrm{C}_4^2\mathrm{A}_5^5}=\frac{2}{7}$．

故选：C

8． $a=2\ln1.01,b=\ln1.02,c=\sqrt{1.04}-1$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

【答案】B

【解析】依题意，$a-c=2\ln1.01+1-\sqrt{1.04},c-b=\sqrt{1.04}-1-\ln1.02$，

令 $f(x)=2\ln(1+x)+1-\sqrt{1+4x},0<x<1$，

求导得 $f'(x)=\frac{2}{1+x}-\frac{2}{\sqrt{1+4x}}=\frac{2}{\sqrt{1+2x+x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1+4x}}>\frac{2}{\sqrt{1+3x}}-\frac{2}{\sqrt{1+4x}}>0$，

因此函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增， $f(0.01)>f(0)=0$，即 $a-c>0$，则 $a>c$；

令 $g(x)=\sqrt{1+2x}-1-\ln(1+x),0<x<1$，求导得 $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}-\frac{1}{1+x}=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}-\frac{1}{\sqrt{1+2x+x^2}}>0$，

因此函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增， $g(0.02)>g(0)=0$，即 $c-b>0$，则 $c>b$，

所以 $b<c<a$.

故选：B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．下列命题正确的是（　　）

A. 若样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的方差为 2，则数据 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_6-1$ 的方差为 8

B. 若 $P(A)=0.6,P(B)=0.8,P(A|B)=0.5$，则 $P(B|A)=\frac{2}{3}$.

C. 在一组样本数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，（$n\geq 2$， $x_1,x_2,\cdots,x_n$，不全相等）的散点图中，若所有样本点 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 都在直线 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 上，则这组样本数据的线性相关系数为 $-\frac{1}{2}$

D. 以模型 $y=ce^{kx}$ 去拟合一组数据时，为了求出经验回归方程，设 $z=\ln y$，求得线性回归方程为 $\hat{z}=4x+0.3$，则 c,k 的值分别是 $e^{0.3}$ 和 4

【答案】ABD

【解析】对于选项 A：若样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的方差为 2，则数据 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_6-1$ 的方差为 $2^2\times 2=8\neq 7$，故 A 正确；

对于选项 B：若 $P(A)=0.6,P(B)=0.8,P(A|B)=0.5$，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{0.8\times 0.5}{0.6}=\frac{2}{3}$$，故 B 正确；

对于选项 C：在一组样本数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，（$n\geq 2$， $x_1,x_2,\cdots,x_n$，不全相等）的散点图中，若所有样本点 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 都在直线 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 上，其中 $-\frac{1}{2}$ 是线性回归方程的一次项系数，不是相关系数，相关系数是刻画一组数据线性相关程度一个量，范围是[−1，1]，当相关系数为正时呈正相关关系，为负时呈负相关关系，故 C 不正确；

对于选项 D：以模型 $y=ce^{kx}$ 去拟合一组数据时，为了求出经验回归方程，设 $z=\ln y$，

则 $z=\ln y=\ln c+\ln e^{kx}=\ln c+kx$，由题线性回归方程为 $\hat{z}=4x+0.3$，则 $\ln c=0.3,k=4$，故 c,k 的值

分别是 $e^{0.3}$ 和 4，故 D 正确.
故选：ABD.

10．已知函数 $f\left(x\right)=\cos^2\left(x+\frac{\varphi}{2}\right)(0<\varphi<\pi)$ 的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$，则（　　）

A. $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 π

B. $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}$

C. 直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 是函数 $f\left(x\right)$ 图像的一条对称轴

D. 若函数 $y=f(\omega x)(\omega>0)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上单调递减，则 $\omega\in\left(0,\frac{7}{12}\right]$

【答案】AC

【解析】$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\cos\left(2x+\varphi\right)+\frac{1}{2}$ 则有 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$，

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，

则 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 π，故 A 正确；

$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，故 B 错误；

$2\times\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6}=\pi$，则直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 是 $f\left(x\right)$ 图像的一条对称轴，故 C 正确；

$y=f(\omega x)=\frac{1}{2}\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，当 $x\in\left[0,\pi\right]$ 时，$2\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，

若函数 $y=f(\omega x)(\omega>0)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上单调递减，则有 $2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\le\pi$，

解得则 $\omega\in\left(0,\frac{5}{12}\right]$，故 D 错误.

故选：AC

11．已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $2\left(S_n+S_{n-1}\right)=a_n^2+1\left(n\ge 2\right)$，$n\in\mathbf{N}^*$. $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，

T_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.下列说法正确的是（　　）

A. $a_2=2$　　　　B. $a_n=(-1)^n$

C. $a_n=2n-1$　　　　D. $T_n<\frac{1}{2}$

【答案】CD

【解析】$2(S_n+S_{n-1})=a_n^2+1(n\geq 2)$，$a_n>0$，

可得 $n=2$ 时，$2(1+a_2+1)=a_2^2+1$，解得 $a_2=3$，故 A 错误，

当 $n\geq 3$ 时，由 $2(S_n+S_{n-1})=a_n^2+1$，可得 $2(S_{n-1}+S_{n-2})=a_{n-1}^2+1$，

上面两式相减可得 $2(a_n+a_{n-1})=a_n^2-a_{n-1}^2=(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})$，

由于 $a_n+a_{n-1}\neq 0$，所以 $a_n-a_{n-1}=2$，

而 $a_2-a_1=2$，则 $a_n=a_2+2(n-2)=3+2(n-1)=2n-1$，首项也符合，

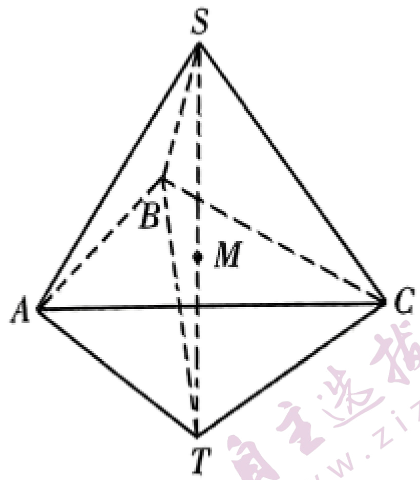
所以 $a_n=2n-1$，$n\in N^*$．故 B 错误，C 正确，

$$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})，$$

$T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})<\frac{1}{2}$．D 正确，

故选：CD

12．如图所示的六面体中，SA，SB，SC 两两垂直，ST 连线经过三角形 ABC 的重心 M，且 $\overrightarrow{SM}=\lambda\overrightarrow{MT}(\lambda>0)$，则（　　）



A. 若 $\lambda=\frac{1}{2}$，则 $TC\perp$ 平面 TAB

B. 若 $\lambda=2$，则 SA // 平面 TBC

C. 若 S,A,B,C,T 五点均在同一球面上，则 $\lambda=\frac{1}{2}$

D. 若点 T 恰为三棱锥 $S-ABC$ 外接球的球心，则 $\lambda=2$

【答案】BCD

【解析】因为六面体中，SA，SB，SC 两两垂直，ST 连线经过三角形 ABC 的重心 M，所以可以将六面体放在长方体中，点 T 在对角线 SN 上运动，

以 S 为坐标原点，SB,SC,SA 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，

设 $SB=m,SC=n.SA=t$，

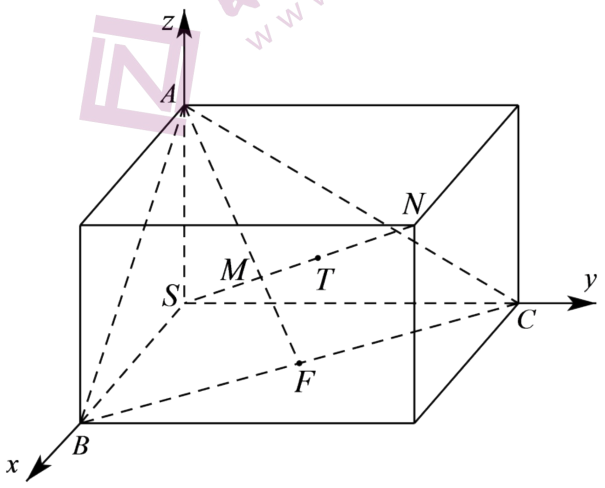
则 $N(m,n,t),A(0,0,t),C(0,n,0),B(m,0,0)$，

设 BC 的中点 F，连接 AF，与 SN 交于点 M，且 $AM=2MF$，

$F\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2},-t\right)$，

设 $M(q,w,e)$，由 $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$ 得 $(q,w,e-t)=\frac{2}{3}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2},-t\right)$，

解得 $q=\frac{1}{3}m,w=\frac{1}{3}n,e=\frac{1}{3}t$，故 $M\left(\frac{1}{3}m,\frac{1}{3}n,\frac{1}{3}t\right)$，$\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SN}$，



A 选项，若 $\lambda=\frac{1}{2}$，即 $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MT}$，此时点 T 在点 N 处，

此时 $\overrightarrow{TC}=(0,n,0)-(m,n,t)=(-m,0,-t)$，$\overrightarrow{TA}=(0,0,t)-(m,n,t)=(-m,-n,0)$，

由于 $\overrightarrow{TC}\cdot\overrightarrow{TA}=(-m,0,-t)\cdot(-m,-n,0)=m^2\neq 0$，故 TC,TA 不垂直，

故 TC 与平面 TAB 不垂直，A 错误；

B 选项，若 $\lambda=2$，即 $\overrightarrow{SM}=2\overrightarrow{MT}$，此时点 T 为对角线 SN 的中点，此时 $T\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2},\frac{t}{2}\right)$，

设平面 TBC 的法向量为 $\vec{j}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \vec{j}\cdot\overrightarrow{TB}=(x,y,z)\cdot\left(\frac{m}{2},-\frac{n}{2},-\frac{t}{2}\right)=\frac{m}{2}x-\frac{n}{2}y-\frac{t}{2}z=0 \\ \vec{j}\cdot\overrightarrow{CB}=(x,y,z)\cdot(m,-n,0)=mx-ny=0 \end{cases}$，

解得 $z=0$，令 $x=n$，则 $y=m$，故 $\vec{j}=(n,m,0)$，

又 $\overrightarrow{SA}=(0,0,t)$，故 $\vec{j}\cdot\overrightarrow{SA}=(n,m,0)\cdot(0,0,t)=0$，

故 $\vec{j}\perp\overrightarrow{SA}$，所以 SA // 平面 TBC，B 正确；

C 选项，由于长方体的顶点在同一球面上，若 S,A,B,C,T 五点均在同一球面上，

则点 T 一定在点 N 处，此时 $\lambda=\frac{1}{2}$，C 正确；

D 选项，三棱锥 $S-ABC$ 的外接球即为长方体 SN 的外接球，
若点 T 恰为三棱锥 $S-ABC$ 外接球的球心，则点 T 为对角线 SN 的中点，
所以 $\lambda=2$，D 正确.
故选：BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{a}$，若 $\vec{c}$ 为 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量，则向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 夹角的余弦值为________

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】由 $\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{a}$，$\vec{c}$ 为 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量，

$$\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{a}=|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\right)\vec{a}=\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\vec{a}$$

所以 $\frac{1}{3}\vec{a}=\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\vec{a}$，故 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{1}{3}$

故答案为：$\frac{1}{3}$

14. $(x^3+1)(x-2)^4$ 展开式中 x^3 项的系数为________ .

【答案】8

【解析】由题意可知：$(x-2)^4$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_4^r\cdot x^{4-r}\cdot(-2)^r, r=0,1,2,3,4$，

所以 $(x^3+1)(x-2)^4$ 展开式中 x^3 项的系数为 $\mathrm{C}_4^4\times(-2)^4+\mathrm{C}_4^1\times(-2)=16-8=8$.

故答案为：8.

15. 已知直线 $y=k_1x$ 与 $y=k_2x\,(k_1>k_2)$ 是曲线 $y=ax+2\ln|x|\,(a\in\mathbf{R})$ 的两条切线，则 $k_1-k_2=$________ .

【答案】$\frac{4}{\mathrm{e}}$

【解析】由已知得，曲线的切线过$(0,0)$，

$x>0$时，曲线为$y=ax+2\ln x$，设$x_1>0$，直线$y=k_1x$在曲线上的切点为$(x_1,ax_1+2\ln x_1)$，

$y'=a+\frac{2}{x_1}$，

切线：$y-(ax_1+2\ln x_1)=\left(a+\frac{2}{x_1}\right)(x-x_1)$，又切线过$(0,0)$

$-ax_1-2\ln x_1=\left(a+\frac{2}{x_1}\right)(-x_1)$，$\therefore x_1=e$，$k_1=a+\frac{2}{\mathrm{e}}$，

同理取$x<0$，曲线为$y=ax+2\ln(-x)$，设$x_2<0$，直线$y=k_2x$在曲线上的切点为$(x_2,ax_2+2\ln(-x_2))$，$y'=a+\frac{2}{x_2}$，

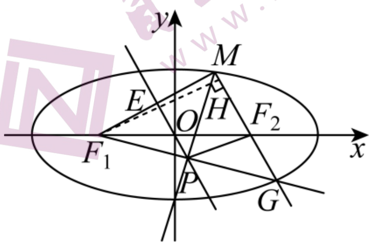
切线：$y-(ax_2+2\ln(-x_2))=\left(a+\frac{2}{x_2}\right)(x-x_2)$，又切线过$(0,0)$

$x_2=-\mathrm{e}$，$k_2=a-\frac{2}{\mathrm{e}}$，$\therefore k_1-k_2=\frac{4}{\mathrm{e}}$，

故答案为：$\frac{4}{\mathrm{e}}$

16. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$的左、右焦点分别为F_1，F_2，M是C上异于顶点的一点，O为坐标原点，E为线段MF_1的中点，$\angle F_1MF_2$的平分线与直线EO交于点P，当四边形MF_1PF_2的面积为$2\sqrt{2}$时，$\sin\angle MF_2F_1=$__________.

【答案】$\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】

由题可知$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，$|MF_1|+|MF_2|=4$．

因为MP平分$\angle F_1MF_2$，所以P到MF_1，MF_2的距离相等，

设为h，则$S_{MF_1PF_2}=\frac{1}{2}(|MF_1|+|MF_2|)h=2h$．

易知OE是$\triangle F_1MF_2$的中位线，延长F_1P，MF_2交于点G，则P为F_1G的中点，

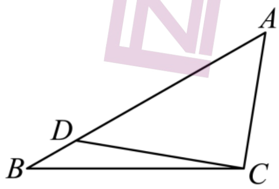
过F_1作$F_1H\perp MG$于H，

易得$|F_1H|=2h=|F_1F_2|\sin\angle MF_2F_1$，则$S_{MF_1PF_2}=2\sqrt{3}\sin\angle MF_2F_1=2\sqrt{2}$，从而$\sin\angle MF_2F_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{6}}{3}$

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a=b\left(\sqrt{3}\sin C+\cos C\right)$．



（1）求B；

（2）已知$BC=2\sqrt{3}$，D为边AB上的一点，若$BD=1$，$\angle ACD=\frac{\pi}{2}$，求AC的长．

【答案】（1）$B=\frac{\pi}{6}$．　　（2）$AC=\frac{\sqrt{21}}{2}$．

【解析】（1）$\because a=b\left(\sqrt{3}\sin C+\cos C\right)$，根据正弦定理得，$\sin A=\sin B\left(\sqrt{3}\sin C+\cos C\right)$，

即$\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sqrt{3}\sin B\sin C+\sin B\cos C$，

所以$\cos B\sin C=\sqrt{3}\sin B\sin C$，因为$\sin C>0$，

所以$\cos B=\sqrt{3}\sin B$，所以$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{6}$．

（2）因为$BC=2\sqrt{3}$，$BD=1$，$B=\frac{\pi}{6}$，根据余弦定理得

$CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cdot\cos B=1+12-2\times1\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=7$，$\therefore CD=\sqrt{7}$.

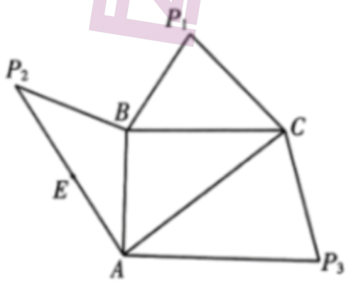
$\because \angle BDC=\dfrac{\pi}{2}+\angle A$，$\therefore \sin\angle BDC=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\angle A\right)=\cos A$.

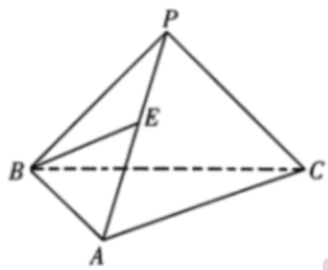
在$\triangle BDC$中，由正弦定理知，$\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=\dfrac{CD}{\sin\angle B}$，$\therefore \dfrac{2\sqrt{3}}{\cos A}=\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}}$，

$\therefore \cos A=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，$A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\sin A=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

$\therefore \tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{CD}{AC}$，$\therefore AC=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

18. 如图，三棱锥$P-ABC$的平面展开图中，$AB\perp BC$，$P_1B=AB=\sqrt{6}$，$P_2A=AC=4$，$P_1C=2\sqrt{2}$，E为P_2A的中点.



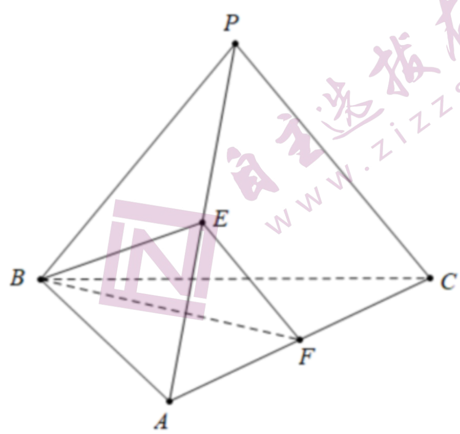


（1）在三棱锥$P-ABC$中，证明：$BE\perp AC$；

（2）求平面PBC与平面ABC夹角的余弦值.

【答案】（1）证明见解析　　（2）$\dfrac{\sqrt{165}}{33}$

【解析】（1）



由 $P_1B=AB=\sqrt{6}$，得 $PB=AB=\sqrt{6}$，且 E 为 PA 的中点，

所以 $BE\perp PA$，

取 AC 中点为 F，连接 EF，BF，

可得 $EF=\dfrac{PC}{2}=\sqrt{2}$，

在 $\triangle PBA$ 中，$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{2}$，

在 $\triangle ABC$ 中，$BF=\dfrac{AC}{2}=2$，

所以 $BE^2+FE^2=BF^2$，

所以 $BE\perp EF$

因为 $EF\cap PA=E$，EF，$PA\subset$ 平面 PAC，

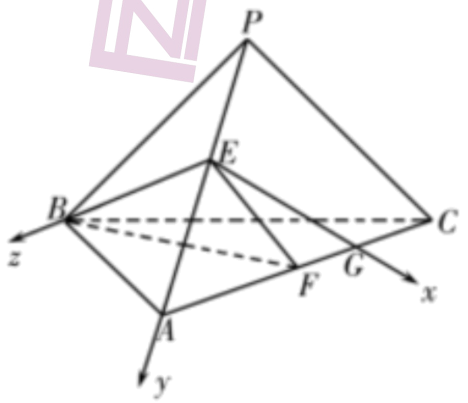
所以 $BE\perp$ 平面 PAC，

因为 $AC\subset$ 平面 PAC，

所以 $BE\perp AC$；

（2）如图，过点 E 作 $EG\perp PA$，交 AC 于点 G，

以 $\overrightarrow{EG}$，$\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{EB}$ 分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向建立空间直角坐标系.



则 $E(0,0,0)$，$A(0,2,0)$，$B(0,0,\sqrt{2})$，$P(0,-2,0)$，

在 $\triangle ABC$ 中，可得点 C 到 PA 距离为 $\sqrt{7}$，

故可得 $C(\sqrt{7},-1,0)$，

$\overrightarrow{AB}=(0,-2,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BC}=(\sqrt{7},-1,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PB}=(0,2,\sqrt{2})$

设平面 ABC 与平面 PBC 的一个法向量分别为 $n_1=(x_1,y_1,z_1)$，$n_2=(x_2,y_2,z_2)$，

平面 PBC 与平面 ABC 的夹角为 θ，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=-2y_1+\sqrt{2}z_1=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{7}x_1-y_1-\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$，取 $y_1=1\Rightarrow x_1=\dfrac{3\sqrt{7}}{7},z_1=\sqrt{2}$，

所以$\vec{n}_1=\left(\frac{3\sqrt{7}}{7},1,\sqrt{2}\right)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PB}=2y_2+\sqrt{2}z_2=0\\\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{7}x_2-y_2-\sqrt{2}z_2=0\end{cases}$，取$y_2=-1\Rightarrow x_2=\frac{\sqrt{7}}{7},z_2=\sqrt{2}$，

所以$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{\frac{10}{7}}{\frac{\sqrt{30}\times\sqrt{22}}{7}}=\frac{\sqrt{165}}{33}$，

所以$\vec{n}_2=\left(\frac{\sqrt{7}}{7},-1,\sqrt{2}\right)$

所以两平面的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{165}}{33}$.

19．已知数列$\{a_n\}$是各项都为正整数的等比数列，$a_1=3$,且a_3是a_2与$\frac{3}{4}a_4$的等差中项，数列$\{b_n\}$满足$b_1=1,b_{n+1}=2b_n+1$.

（1）求数列$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式;

（2）若$k\cdot\frac{b_n+5}{2}-a_n\geq 8n+2k-24$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求实数$k$的取值范围.

【答案】（1）$a_n=3\times 2^{n-1}$，$b_n=2^n-1$；（2）$[4,+\infty)$.

【解析】（1）设数列$\{a_n\}$的公比为q，则$q\in N^*$，

$\because a_3$是a_2与$\frac{3}{4}a_4$的等差中项，$\therefore 2a_3=a_2+\frac{3}{4}a_4$，

$\therefore 2q=1+\frac{3}{4}q^2$，解得$q=2$或$q=\frac{2}{3}$(舍去)，$\therefore a_n=3\times 2^{n-1}$

$\because b_{n+1}=2b_n+1,\therefore b_{n+1}+1=2(b_n+1)$，

又$b_1+1=2$，$\therefore$数列$\{b_n+1\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，

$\therefore b_n+1=2^n,\therefore b_n=2^n-1$；

（2）由$k\cdot\frac{b_n+5}{2}-a_n\geq 8n+2k-24$，

整理可得$k\left(2^{n-1}+2\right)-3\times 2^{n-1}\geq 8(n-3)+2k$，即$(k-3)\cdot 2^{n-1}\geq 8(n-3)$，

$\therefore\frac{k-3}{16}\geq\frac{n-3}{2^n}$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，

令 $f(n)=\frac{n-3}{2^n}$，则 $f(n+1)-f(n)=\frac{n-2}{2^{n+1}}-\frac{n-3}{2^n}=\frac{(n-2)-2(n-3)}{2^{n+1}}=\frac{4-n}{2^{n+1}}$

$\therefore$ 当 $n\le 4$ 时，$f(n+1)\ge f(n)$，当 $n\ge 5$ 时，$f(n+1)<f(n)$，

$\therefore$ 当 $n=4$ 或 5 时，$f(n)$ 取得最大值，

$\therefore f(n)_{max}=f(4)=16$

$\therefore \frac{k-3}{16}\ge\frac{1}{16}$.解得 $k\ge 4$.

故实数 k 的取值范围是 $[4,+\infty)$.

20．某中学有 A，B 两个餐厅为老师与学生们提供午餐与晚餐服务，王同学、张老师两人每天午餐和晚餐都在学校就餐，近一个月（30 天）选择餐厅就餐情况统计如下：

选择餐厅情况（午餐，晚餐）	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
王同学	9 天	6 天	12 天	3 天
张老师	6 天	6 天	6 天	12 天

假设王同学、张老师选择餐厅相互独立，用频率估计概率．

（1）估计一天中王同学午餐和晚餐选择不同餐厅就餐的概率；

（2）记 X 为王同学、张老师在一天中就餐餐厅的个数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（3）假设 M 表示事件“A 餐厅推出优惠套餐”，N 表示事件“某学生去 A 餐厅就餐”，$P(M)>0$，已知推出优惠套餐的情况下学生去该餐厅就餐的概率会比不推出优惠套餐的情况下去该餐厅就餐的概率要大，证明．$P(M|N)>\mathrm{P}(M|\overline{N})$.

【答案】（1）0.6　　（2）分布列见解析，1.9　　（3）证明见解析

【解析】（1）设事件 C 为“一天中王同学午餐和晚餐选择不同餐厅就餐”，

因为 30 天中王同学午餐和晚餐选择不同餐厅就餐的天数为 $6+12=18$，

所以 $P(C)=\frac{18}{30}=0.6$.

（2）记 X 为王同学、张老师在一天中就餐餐厅的个数，

则 X 的所有可能取值为 1 和 2，

所以 $P(X=1)=0.3\times0.2+0.1\times0.4=0.1$，

$P(X=2)=1-P(X=1)=0.9$，

所以 X 的分布列为

X	1	2

P	0.1	0.9

所以 X 的数学期望 $E(X)=1\times0.1+2\times0.9=1.9$．

（3）由题知 $P(N|M)>P(N|\bar{M})$，所以 $\dfrac{P(NM)}{P(M)}>\dfrac{P(N\bar{M})}{P(\bar{M})}=\dfrac{P(N)-P(NM)}{1-P(M)}$

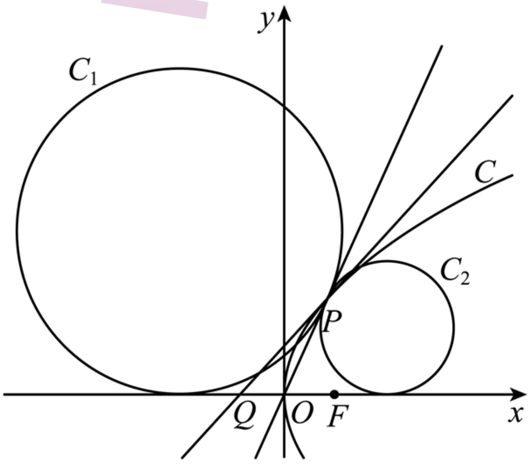
所以 $P(NM)>P(N)\cdot P(M)$，

所以 $P(NM)-P(N)P(NM)>P(N)\cdot P(M)-P(N)P(NM)$，

即 $P(NM)\cdot P(\bar{N})>P(N)\cdot P(\bar{N}M)$，

所以 $\dfrac{P(NM)}{P(N)}>\dfrac{P(\bar{N}M)}{P(\bar{N})}$，即 $P(M|N)>P(M|\bar{N})$

21．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，F 为 x 轴正半轴上的一个动点．以 F 为焦点、O 为顶点作抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$．设 P 为第一象限内抛物线 C 上的一点，Q 为 x 轴负半轴上一点，设 $Q(-a,0)$，使得 PQ 为抛物线 C 的切线，且 $|PQ|=2$．圆 C_1、C_2 均与直线 OP 切于点 P，且均与 x 轴相切．



（1）试求出 a,p 之间的关系；

（2）是否存在点 F，使圆 C_1 与 C_2 的面积之和取到最小值．若存在，求出点 F 的坐标；若不存在，请说明理由．

【答案】（1）$4a^2+2pa=4$　（2）存在，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}},0\right)$

【解析】（1）由条件抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$，点 $Q(-a,0)(a>0)$，

设 $l_{PQ}:x=my-a(m>0)$，将其与抛物线 C 的方程联立，消去 x 得 $y^2-2pmy+2pa=0$．①

因为 PQ 与抛物线 C 切于点 P，所以，方程①的判别式为 $\Delta = 4p^2m^2 - 4\times 2pa = 0$，解得 $m=\sqrt{\dfrac{2a}{p}}$．

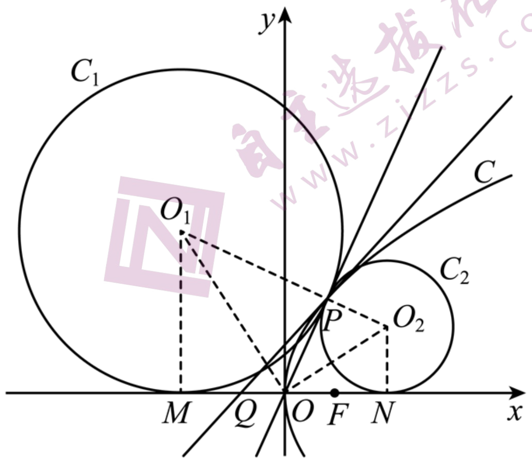
进而，点 $P\left(a,\sqrt{2pa}\right)$．故 $|PQ| = \sqrt{1+m^2}\,|y_P - 0| = \sqrt{1+\dfrac{2a}{p}}\sqrt{2pa} = \sqrt{4a^2+2pa}$．

由 $|PQ|=2$，则 $4a^2+2pa=4$．②∴ $4a^2+2pa=4$．

（2）设 C_1、C_2 的圆心分别为 $O_1\left(x_1,y_1\right)$、$O_2\left(x_2,y_2\right)$．

注意到，OP 与 C_1、C_2 圆切于点 P．故 $OP\perp O_1O_2$．

设圆 C_1、C_2 与 x 轴分别切于 M、N，如图所示：



则 OO_1、OO_2 分别为 $\angle POM$、$\angle PON$ 的角平分线，故 $|O_1M| = |O_1P|$，$|O_2N| = |O_2P|$，$\angle O_1OO_2 = 90^\circ$，

易知 $\triangle OPO_2 \sim \triangle O_1PO$，则 $\dfrac{|O_1P|}{|OP|} = \dfrac{|OP|}{|O_2P|}$，

$y_1y_2 = |O_1M|\cdot|O_2N| = |O_1P|\cdot|O_2P| = |OP|^2 = x_p^2 + y_p^2 = a^2+2pa$．

结合式②有 $y_1y_2 = a^2+2pa = 4-3a^2$．③

由 O_1、P、O_2 三点共线得 $\dfrac{y_1-\sqrt{2pa}}{\sqrt{2pa}-y_2} = \dfrac{y_1-y_P}{y_P-y_2} = \dfrac{|O_1P|}{|PO_2|} = \dfrac{|O_1M|}{|O_2N|} = \dfrac{y_1}{y_2}$，化简可得

$y_1+y_2 = \dfrac{2}{\sqrt{2pa}}y_1y_2$．④

令 $T = y_1^2+y_2^2$，于是，圆 C_1、C_2 的面积之和 πT．

根据题意，仅需考虑 T 取最小值的情形，根据③、④知

$T=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=\frac{4}{2pa}\cdot y_1^2y_2^2-2y_1y_2=\frac{4}{4-4a^2}(4-3a^2)^2-2(4-3a^2)=\frac{(4-3a^2)(2-a^2)}{1-a^2}$.

令 $t=1-a^2$. 由 $4t=4-4a^2=2pa>0$, $t>0$,

$T=\frac{(3t+1)(t+1)}{t}=3t+\frac{1}{t}+4\geq 2\sqrt{3t\cdot\frac{1}{t}}+4=2\sqrt{3}+4$.

当且仅当 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，上式等号成立．此时，$a=\sqrt{1-t}=\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

结合式②得 $\frac{p}{2}=\frac{1-a^2}{a}=\frac{t}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}}=\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}$. 故点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}},0\right)$.

22．已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\frac{a}{x}+\ln x$，$g(x)=ax-\ln x-2$.

（1）当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都存在极小值，且极小值之和为 0 时，求实数 a 的值；

（2）若 $f(x_1)=f(x_2)=2(x_1\neq x_2)$，求证：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{2}{a}$.

【答案】（1）1　　（2）证明见解析

【解析】（1）$f(x)$，$g(x)$ 定义域均为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-a+x}{x^2}$, ,

当 $a\leq 0$ 时，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，无极值，与题不符；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得：$x=a$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore$ 在 $x=a$ 取极小值，且 $f(a)=1+\ln a$；

又 $g'(x)=a-\frac{1}{x}$，

当 $a\leq 0$ 时：$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，无极值，与题不符；

当 $a>0$ 时：令 $g'(x)=0$，解得：$x=\frac{1}{a}$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 单调递增，

$\therefore$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 取极小值，且 $g\left(\frac{1}{a}\right)=-1+\ln a$；

由题：，解得：$a=1$.

（2）令 $m=\frac{1}{x_1}, n=\frac{1}{x_2}$，因为 $x_1 \neq x_2$，所以 $m \neq n$，

由 $f(x_1)=f(x_2)=2(x_1 \neq x_2)$ 可得：$\begin{cases} \frac{a}{x_1}+\ln x_1=2 \\ \frac{a}{x_2}+\ln x_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} am-\ln m=2\cdots(1) \\ an-\ln n=2\cdots(2) \end{cases}$，

（1）-（2）得：$a(m-n)=\ln m-\ln n$，所以 $\frac{1}{a}=\frac{m-n}{\ln m-\ln n}$，

要证：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{2}{a}$，只要证：$m+n>\frac{2}{a}$，只要证：$m+n>2\frac{m-n}{\ln m-\ln n}$，

不妨设 $0<n<m$，所以只要证：$\ln\frac{m}{n}>\frac{2(m-n)}{m+n}$，

即证：$\ln\frac{m}{n}>\frac{2\left(\frac{m}{n}-1\right)}{\frac{m}{n}+1}$，令 $t=\frac{m}{n}(t>1)$，只要证：$\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，

令 $h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{2(t+1)-2(t-1)}{(t+1)^2}=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$，

所以 $h(t)$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$，即有 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$ 成立，所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{2}{a}$ 成立.