高 2021 级高三期末考试数学试题（文科）参考答案

一、1－5CDADD　6－10ABDCB　11－12CB

二、　13、$\frac{4\sqrt{13}}{13}$　　14、4　　15、$-2\sqrt{2}$　　16、2

三、17、解：（1）由题意可知：$10(a+0.045+0.020)=0.7$，$(2a+b+0.045+0.020)\times 10=1$，

解得 $a=0.005$，$b=0.025$；

（2）由频率分布直方图估计众数为 $\frac{65+75}{2}=70$，前两个分组频率之和为 0.3，前三个分组频率之和为 0.75，则估计中位数为 $65+\frac{0.5-0.3}{0.75-0.3}\times 10=65+\frac{40}{9}\approx 69.4$；

（3）根据分层抽样，$[75,85)$ 和 $[85,95]$ 的频率比为 $\frac{0.02}{0.005}=4$，故在 $[75,85)$ 和 $[85,95]$ 中分别选取 4 人和 1 人，分别设为 a_1,a_2,a_3,a_4 和 b_1，则在这 5 人中随机抽取两个的样本空间 Ω 包含的样本点有 $a_1a_2,a_1a_3,a_1a_4,a_1b_1,a_2a_3,a_2a_4,a_2b_1,a_3a_4,a_3b_1,a_4b_1$ 共 10 个，即 $n(\Omega)=10$，记事件 A =“两人来自不同组”，则事件 A 包含的样本点有 $a_1b_1,a_2b_1,a_3b_1,a_4b_1$ 共 4 个，即 $n(A)=4$，

所以 $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

18、(1) 由 $(n+2)b_n=nb_{n+1}$ 得：$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+2}{n}$，故 $\frac{b_2}{b_1}=\frac{3}{1}$，$\frac{b_3}{b_2}=\frac{4}{2}$，$\frac{b_4}{b_3}=\frac{5}{3}$，……，$\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}=\frac{n}{n-2}$，$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，

以上 n-1 个式子相乘得，$\frac{b_n}{b_1}=\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$，故 $b_n=n(n+1)$；

（2）由 $c_n=\frac{4\cdot 3^{n-1}}{n+1}$，结合（1）可得：$b_nc_n=4n\cdot 3^{n-1}$，

所以 $T_n=b_1c_1+\ldots+b_nc_n=4\times(1\times 3^0+2\times 3^1+\ldots+n\cdot 3^{n-1})$，$3T_n=4\times[1\times 3^1+2\times 3^2+\ldots+(n-1)\cdot 3^{n-1}+n\cdot 3^n]$，

两式相减得，$-2T_n=4\times(3^0+3^1+3^2+\ldots+3^{n-1}-n\cdot 3^n)=4(\frac{3^n-1}{2}-n\cdot 3^n)$，

所以 $-2T_n=4\times(3^0+3^1+3^2+\ldots+3^{n-1}-n\cdot 3^n)=4(\frac{3^n-1}{2}-n\cdot 3^n)$，故 $T_n=1+(2n-1)\cdot 3^n$.

19、（1）由球的表面积公式 $S=4\pi R^2=\frac{169\pi}{9}$，得 $R=\frac{13}{6}$，

设球心为 O_1，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，高为 $PO=3$，则 O_1 必在 PO 上，

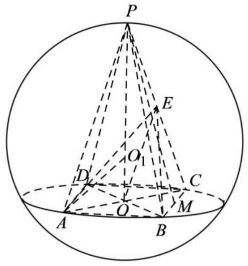
连 AO_1，则 $O_1O=PO-R=\frac{5}{6}$，$AO_1=R=\frac{13}{6}$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1OA$，有 $OO_1^2+OA^2=O_1A^2$，即 $OA=2$，可得正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{2}$，侧棱 $PA=\sqrt{OP^2+OA^2}=\sqrt{13}$；

在正方形 $ABCD$ 中，$BC//AD$，所 $\angle PBC$ 以是异面直线 BP 和 AD 所成的角或其补角，

取 BC 中点 M，在等腰 $\triangle PBC$ 中，可得 $PM\perp BC$，斜高 $PM=\sqrt{11}$，

则在 $\mathrm{Rt}\triangle PMB$ 中，$\cos\angle PBC=\frac{BM}{PB}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{26}}{13}$，

所以异面直线 BP 和 AD 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{26}}{13}$；



（2）由 O,E 为 CA,CP 中点，得 $OE//AP$，

且满足 $OE\not\subset$ 平面 $PAD,AP\subset$ 平面 PAD，所以 $OE//$ 平面 PAD，

所以 E 到平面 PAD 的距离等于 O 到平面 PAD 的距离，

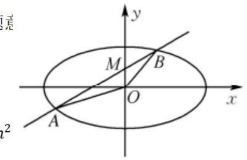
又因为 $S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}=\sqrt{22},S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$，

再设 O 到平面 PAD 的距离为 h，则由 $V_{O-PAD}=V_{P-AOD}$，

可得 $\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PAD}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle AOD}\cdot PO$，即 $\sqrt{22}h=2\times 3$，则 $h=\frac{3\sqrt{22}}{11}$，

所以点 E 到平面 PAD 的距离 $\frac{3\sqrt{22}}{11}$.

20、解：(1) 由题意得，$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5},\\ a^2=b^2+c^2,\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ 解得 $a^2=4$，$b^2=1$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.



(2) 当直线 l 不存在斜率时，直线与纵轴有无数或没有交点，不符合题

当直线 l 存在斜率时，设直线 l 的方程设为 $y=kx+m$，

于是有 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=kx+m\end{cases}\Rightarrow(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

因为该直线与椭圆有两个交点，所以有 $\Delta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2$

化简得 $4k^2-m^2+1>0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，于是有 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$，因为 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OM}$，

所以 $(x_1,y_1)+2(x_2,y_2)=3(0,m)\Rightarrow x_1+2x_2=0\Rightarrow x_1=-2x_2$，

代入 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$ 中，得 $-2x_2+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}\Rightarrow x_2=\frac{8km}{1+4k^2}$，于是有 $(-2x_2)\cdot x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$

$\Rightarrow -2\left(\frac{8km}{1+4k^2}\right)^2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$，化简，得 $k^2=\frac{m^2-1}{4-36m^2}$，代入 $4k^2-m^2+1>0$ 中，

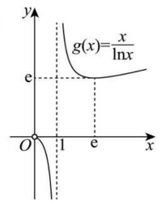
得 $4\cdot\frac{m^2-1}{4-36m^2}-m^2+1>0\Rightarrow\frac{1}{9}<m^2<1$，所以 m 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3},1\right)\cup\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$.

21、解：（1）当 $\lambda=0$ 时，显然不满足题意，

当 $\lambda\neq 0$ 时，若函数 $y=P(x)$ 只有一个零点，即 $x-\lambda\ln x=0$ 只有一个根，因为 1 不是方程的根，所以可转化为 $\lambda=\frac{x}{\ln x}$ 只有一个根，即直线 $y=\lambda$ 与函数 $g(x)=\frac{x}{\ln x}$（$x>0$ 且 $x\neq 1$）的图象只有一个交点.

$g'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$，在 $(0,1)$ 和 $(1,\mathrm{e})$ 上，$g'(x)<0$，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在和 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递减，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增.

在 $x=\mathrm{e}$ 时有极小值 $g(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，$g(x)$ 图象如图所示：



由图可知：若要使直线 $y=\lambda$ 与函数 $g(x)=\frac{x}{\ln x}$ 的图象只有一个交点，

则 $\lambda<0$ 或 $\lambda=\mathrm{e}$，综上 λ 的取值所构成的集合为 $(-\infty,0)\cup\{\mathrm{e}\}$.

（2）由题意知 $f(x)=e^{\lambda x}-\lambda\ln x$， $f'(x)=\frac{\lambda}{x}(xe^{\lambda x}-1)$,

令 $t(x)=xe^{\lambda x}-1(x\ge 0)$, 得 $t'(x)=(1+x)e^{\lambda x}>0$, 所 $t(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $t(0)=-1<0, t(1)=e^{\lambda}-1>0$. 由零点的存在性定理知存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $x_0e^{\lambda x_0}-1=0$,

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增.

故 $h(\lambda)=f(x_0)=e^{\lambda x_0}-\lambda x_0$. 又 $x_0e^{\lambda x_0}-1=0$, 所以 $\lambda=-\frac{\ln x_0}{x_0}$， 又 $\lambda\in(0,e)$， 所以 $0<-\frac{\ln x_0}{x_0}<e$.

令 $r(x)=-\frac{\ln x}{x}\Rightarrow r'(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}$, $r(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减， $r(1)=0, r(\frac{1}{e})=e$.

由 $0<-\frac{\ln x_0}{x_0}<e$ 得 $\frac{1}{e}<x_0<1$. 将 $\lambda=-\frac{\ln x_0}{x_0}$ 代入 $h(\lambda)=e^{\lambda x_0}-\lambda x_0$，

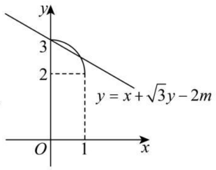
得 $h(\lambda)=\frac{1}{x_0}+\frac{(\ln x_0)^2}{x_0}(\frac{1}{e}<x_0<1)$. 令 $M(x)=\frac{1}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}(\frac{1}{e}<x<1)$，得 $M'(x)=-\frac{(\ln x-1)^2}{x^2}<0$，

所以 $M(x)=\frac{1}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}(\frac{1}{e}<x<1)$ 在 $(\frac{1}{e},1)$ 单调递减，又 $M(\frac{1}{e})=2e, M(1)=1$.

所以 $h(\lambda)$ 的值域为 $(1,2e)$.

22、（1）因为 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$， $x=\cos\alpha\in[0,1]$， $y=2+\sin\alpha\in[2,3]$，将曲线 C 的参数方程中的参数消去，并结合 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 可得曲线 C 的普通方程为： $x^2+(y-2)^2=1(0\le x\le 1, 2\le y\le 3)$.

直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\rho\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=m$，将 $\rho\cos\theta=x$， $\rho\sin\theta=y$ 代入上式，得直线 l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y-2m=0$.



（2）曲线 C 是以 $(0,2)$ 为圆心，1 为半径的四分之一圆弧，且圆弧两端点的坐标分别为 $(0,3)$ 和 $(1,2)$，作出曲线 C 与直线 l，如图所示，当直线 l 经过点 $(0,3)$ 时，直线 l 与曲线 C 有两个交点，此时 $m=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 当直线 l 与曲线 C 相切时，有 $\frac{|0+2\sqrt{3}-2m|}{2}=1$，解得 $m=1+\sqrt{3}$ 或 $m=\sqrt{3}-1$（舍去）. 数形结合可知 m 的取值范围为 $\left[\frac{3\sqrt{3}}{2},1+\sqrt{3}\right)$.

23、解:（1） $f(x)\le 7$，即 $|x|+|x-2|\le 6$，利用零点分区间法，对 $f(x)$ 去绝对值，当 $x<0$ 时，由 $-2x+2\le 6$，得 $x\ge -2$，所以 $x\in[-2,0)$，当 $0\le x<2$ 时， $2\le 6$ 成立，所以 $x\in[0,2)$，当 $x\ge 2$ 时，由 $2x-2\le 6$，得 $x\le 4$，所以 $x\in[2,4]$. 综上可知，不等式 $f(x)\le 7$ 的解集为 $[-2,4]$.

（2）由题意，可知 $m>0$，由（1）得当 $x<0$ 时， $m\ge -2+\frac{1}{x}$ 恒成立，因为 $-2+\frac{1}{x}<0$，所以 $m>0$ 时不等式恒成立；

当 $x=0$ 时， $2\le 3$ 恒成立，所以 $m>0$ 时不等式恒成立；

当 $0<x<2$ 时， $m\le\frac{1}{x}$ 恒成立，而 $\frac{1}{x}>\frac{1}{2}$， 所以 $0<m\le\frac{1}{2}$ 时不等式恒成立；

当 $x\ge 2$ 时，即 $m\le 2-\frac{3}{x}$ 恒成立，而 $\frac{1}{2}\le 2-\frac{3}{x}<2$，所以 $0<m\le\frac{1}{2}$ 不等式恒成立.

综上，满足要求的 m 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。