

甘肃省一月份高考诊断考试·数学

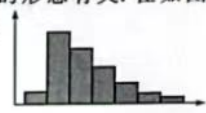
本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟.

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号框涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号框.回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

参考公式:锥体的体积公式: $V=\frac{1}{3}sh$ (其中 s 为锥体的底面积, h 为锥体的高).

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A=\{x|y=\sqrt{4x-1}\}$, $B=\{x|x^2-2x-3<0\}$, 则 $A\cap B=$ ()
 A. $[\frac{1}{4}, 3)$ B. $[\frac{1}{4}, 1)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$
 2. 若复数 z 满足 $(3-i)z=1-2i$, 其中 i 是虚数单位, 则复数 z 在复平面内对应的点位于 ()
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
 3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_2, a_8 是方程 $x^2+mx-8=0$ 的两根, 若 $a_4+a_6=a_5^2+1$, 则 m 的值为 ()
 A. -6 B. -2 C. 2 D. 6
 4. 众数、平均数、中位数都描述了数据的集中趋势, 它们的大小关系和数据分布的形态有关. 在如图所示的分布形态中, 平均数、众数和中位数的大小关系是(由小到大排列) ()
 A. 众数<中位数<平均数 B. 平均数<众数<中位数
 C. 中位数<平均数<众数 D. 众数<平均数<中位数
- 
5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x\leq 0, \\ \ln x, & x>0, \end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有 3 个零点, 则 m 的取值范围为 ()
 A. $[0, \frac{1}{e})$ B. $(-1, \frac{1}{e})$ C. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)$
 6. 已知平行四边形 $ABCD$, 若点 P 是边 AD 的中点, $\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{QB}$, 直线 AC 与 PQ 相交于点 M , 则 $\frac{AM}{AC}=$ ()
 A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{3}{5}$
 7. 已知 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})-\sin\alpha=\frac{4}{5}$, 则 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})=$ ()
 A. $\frac{7}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $\frac{24}{25}$ D. $-\frac{24}{25}$
 8. 设函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x)-f(x)=x\ln x$, $f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}$, 若 $x>0$, 则 $f(x)$ ()
 A. 有极大值, 无极小值 B. 有极小值, 无极大值
 C. 既有极大值又有极小值 D. 既无极大值也无极小值

甘肃省一月份高考诊断考试·数学·第 1 页(共 4 页)

考号

班级

姓名

文/理

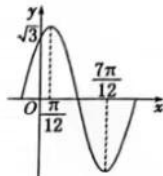
学校

县(区)

二、多项选择题(本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分)

9. 已知函数 $f(x) = A\sin(2\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 在一个周期内的图象如图所示, 图象与 y 轴的交点为 $(0, \sqrt{3})$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
- B. $f(x)$ 的最大值为 2
- C. 直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称轴
- D. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, 0]$ 上单调递增



10. 已知 $a > 0, b > 0$, 若 $a + 2b = 1$, 则

- A. ab 的最大值为 $\frac{1}{8}$
- B. $a^2 + b^2$ 的最小值为 1
- C. $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 8
- D. $2^a + 4^b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$

11. 已知直线 l 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 F , 且与抛物线 C 交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 点 M 为 C 的准线与 x 轴的交点, 则下列结论正确的是 ()

- A. 若 $x_1 + x_2 = 5$, 则 $|AB| = 7$
- B. 过 C 的焦点的最短弦长为 4
- C. 当 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$ 时, 直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$
- D. 存在 2 条直线 l , 使得 $|AF| \cdot |BM| = |BF| \cdot |AM|$ 成立

12. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内接于球 $O, AA_1 = 8, AB \perp AC, AB = AC = 4$, 点 D, E 为 AB, AC 的中点, 点 Q 为侧面 BCC_1B_1 上一动点, 且 $A_1Q = 4$, 则下列结论正确的是 ()

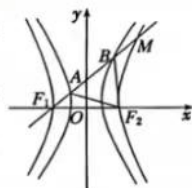
- A. 点 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\frac{8}{3}$
- B. 存在点 Q , 使得 $CQ \perp$ 平面 A_1DE
- C. 过点 D 作球的截面, 截面的面积最小为 4π
- D. 点 Q 的轨迹长为 $2\sqrt{2}\pi$

三、填空题(本题共4小题,每小题5分,共20分)

13. 已知 $f(x) = \frac{a^x}{a^x - 1} + m$ ($a > 1$) 是奇函数, 则 $m =$ _____.

14. 传说古希腊数学家阿基米德的墓碑上刻着一个圆柱, 圆柱内有一个内切球, 这个球的直径恰好与圆柱的高相等. “圆柱容球”是阿基米德最为得意的发现. 在一个“圆柱容球”模型中, 若球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$, 则该模型中圆柱的表面积为 _____.

15. 如图, 点 F_1, F_2 是双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, 同时也是双曲线 $C_2: \frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{4b^2} = 1$ 的左、右顶点, 过点 F_1 的直线交双曲线 C_1 的左、右两支分别于 A, B 两点, 交双曲线 C_2 的右支于点 M (与点 F_2 不重合), 且 $\triangle BF_1F_2$ 与 $\triangle ABF_2$ 的周长之差为 6, 则双曲线 C_1 的方程为 _____.



16. 某学校有 A, B 两个餐厅, 已知同学甲每天中午都会在这两个餐厅中选择一个就餐, 如果甲当天选择了某个餐厅, 他第二天会有 60% 的可能性换另一个餐厅就餐, 假如第 1 天甲选择了 A 餐厅, 则第 n 天选择 A 餐厅的概率 P_n 为 _____.

四、解答题(本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10分)已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且 $c\cos B + b\cos C = -2a\cos B$.

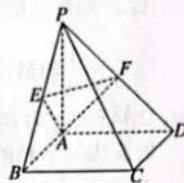
(1)求角 B 的大小;

(2)若 A 的角平分线交边 BC 于点 D ,且 $AD = \sqrt{3}, c = \sqrt{2}$,求边 b .

18. (12分)如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形,侧棱 $PA \perp$ 底面 $ABCD$,且 $PA = AB$,点 E, F 分别为 PB, PD 的中点.

(1)若平面 $PBC \cap$ 平面 $PAD = l$,证明: $l \perp$ 平面 PAB ;

(2)求平面 AEF 与平面 PAB 夹角的余弦值.



19. (12分)第18届亚洲杯将于2024年1月12日在卡塔尔举行,该比赛预计会吸引亿万球迷观看.为了了解某校大学生喜爱观看足球比赛是否与性别有关,该大学记者站随机抽取了100名学生进行统计,其中女生喜爱观看足球比赛的占女生人数的 $\frac{1}{4}$,男生有10人表示不喜欢看足球比赛.

(1)完成下面 2×2 列联表,试根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验,判断能否认为喜爱观看足球比赛与性别有关联?

	男	女	合计
喜爱看足球比赛			
不喜爱看足球比赛			
合计	60		

(2)在不喜爱观看足球比赛的观众中,按性别用分层随机抽样的方式抽取8人,再从这8人中随机抽取2人参加校记者站的访谈节目,设抽到的男生人数为 X ,求 X 的分布列和期望.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n = a+b+c+d$.

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
χ_{α}	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

20. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n - 2$, $\{a_n \cdot b_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且不等式 $\lambda \geq n(3 - T_n)$ 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+1)$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求曲线 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $f(x) - x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 求 a 的取值范围.

22. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 短轴长为 2.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $(4, 2)$ 且斜率不为 $\frac{1}{2}$ 的动直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 点 P 是直线 $y = \frac{1}{2}x$ 上一定点, 设直线 PM, PN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 k_2$ 为定值, 求点 P 的坐标.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw