炎德·英才大联考雅礼中学2024届高三月考试卷(六)

数 学

命题人:黄文辉　　审题人:陈朝阳、黄爱民

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|y=\sqrt{x-2}\}$,$B=\left\{x\left|\frac{x}{x-4}\leqslant 0\right.\right\}$,则 $A\cap B=$

A. $(2,4)$　　B. $[2,4)$　　C. $(2,4]$　　D. $\varnothing$

2. 已知 $z=\frac{1+ai}{1+i^{2023}}(a\in\mathbf{R})$,若 z 为纯虚数,则 $|z|=$

A. 1　　B. [illegible]　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

★3. 已知等比数列$\{a_n\}$的前3项和为168,$a_2-a_5=42$,则a_6等于

A. 14　　B. 12　　C. 6　　D. 3

★4. 色差和色度是衡量毛绒玩具质量优劣的重要指标,现抽检一批产品测得数据列于表中.已知该产品的色度 y 和色差 x 之间满足线性相关关系,且 $\hat{y}=0.8x+\hat{a}$,现有一对测量数据为(30,23.6),则该数据的残差为

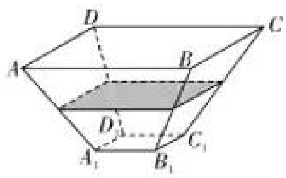
色差 x	21	23	25	27
色度 y	15	18	19	20

A. 0.96　　B. 0.8　　C. -0.8　　D. -0.96

★5. $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$的展开式中 x^2y^6 的系数为

A. -28　　B. 28　　C. -84　　D. 84

6. "方斗"常作为盛米的一种容器,其形状是一个上大下小的正四棱台,现有"方斗"容器如图所示,已知 $AB=4$,$A_1B_1=2$,现往容器里加米,当米的高度是"方斗"高度的一半时,用米38 kg,则该"方斗"可盛米的总质量为



A. 74 kg　　B. 114 kg

C. 76 kg　　D. 112 kg

★7. 学校从高一 3 名男数学老师和 3 名女数学老师中选派 4 人，承担本次模拟考试数学阅卷任务，则在选派的 4 人中已知至少有 2 名男老师的条件下，有 2 名女老师的概率为

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{12}{25}$

8. 已知对任意实数 x 都有 $f'(x)=2e^x+f(x)$，$f(0)=-1$，若不等式 $f(x)<a(x-1)$（其中 $a<1$）的解集中恰有两个整数，则 a 的取值范围是

A. $\left[\frac{3}{2e},1\right)$　　B. $\left[-\frac{3}{2e},1\right)$

C. $\left[\frac{5}{3e^2},\frac{3}{2e}\right)$　　D. $\left[\frac{5}{3e^2},1\right)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 若 $a>b>1$，$c\in\mathbf{R}$，则下列说法一定正确的是

A. $ac>bc$　　B. $\log_b a>1$

C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant 4$　　D. 若 $a+b=4$，则 $2^a+2^b>8$

10. 抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A，B 两点（点 A 在 x 轴的下方），则下列结论正确的是

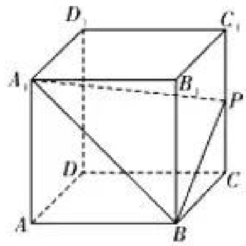
A. 若 $|AB|=8$，则 AB 中点到 y 轴的距离为 3

B. 弦 AB 的中点的轨迹为抛物线

C. 若 $\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{FA}$，则直线 AB 的斜率为 $\sqrt{3}$

D. $4|AF|+|BF|$ 的最小值等于 9

11. 如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD=60^\circ$，$AB=AA_1=2$，P 为 CC_1 的中点，点 Q 满足 $\overrightarrow{DQ}=\lambda\overrightarrow{DC}+\mu\overrightarrow{DD_1}$（$\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$），则下列结论正确的是



A. 若 $\lambda+\mu=\frac{1}{3}$，则四面体 A_1BPQ 的体积为定值

B. 若 $\triangle A_1BQ$ 的外心为 O，则 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{A_1O}$ 为定值 2

C. 若 $A_1Q=\sqrt{5}$，则点 Q 的轨迹长度为 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

D. 若 $\lambda=1$ 且 $\mu=\frac{1}{2}$，则存在点 $E\in A_1B$，使得 $AE+EQ$ 的最小值为 $\sqrt{9+2\sqrt{10}}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1)$. 若 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，则实数 m 的值为__________.

★13. 若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan 2\alpha=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，则 $\tan\alpha$ 等于__________.

14. 已知 F 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，过点 F 作 $FA\perp x$ 轴交双曲线于第一象限内的点 A，点 B 与点 A 关于原点对称，连接 AB，BF，当 $\angle ABF$ 取得最大值时，双曲线的离心率为__________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $a=b\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$.

(1) 求角 B；

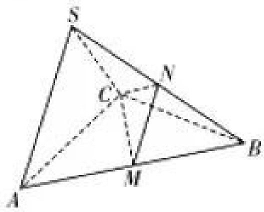
(2) 过 B 作 $BD\perp BA$，交线段 AC 于 D，且 $AD=2DC$，求角 C.

16.（本小题满分 15 分）

在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形，平面 $SAC\perp$ 平面 ABC，$SA=SC=2\sqrt{3}$，M，N 分别为 AB，SB 的中点.

(1) 证明：$AC\perp SB$；

(2) 求二面角 $N-CM-B$ 的正弦值的大小.



★17.（本小题满分 15 分）

为落实立德树人的根本任务，坚持"五育"并举，全面推进素质教育，某校举行了乒乓球比赛，其中参加男子乒乓球决赛阶段比赛的 12 名队员来自 3 个不同校区，3 个校区的队员人数分别是 3，4，5. 本次决赛的比赛赛制采取单循环方式，即每名队员进行 11 场比赛（每场比赛都采取 5 局 3 胜制），根据积分选出最后的冠军. 积分规则如下：比赛中以 3∶0 或3∶1取胜的队员积 3 分，失败的队员积 0 分；以 3∶2 取胜的队员积 2 分，失败的队员积 1 分.

(1)若每名队员获得冠、亚军的可能性相同，则比赛结束后，冠、亚军恰好来自不同校区的概率是多少？

(2)已知第 10 轮小李对抗小王，设每局比赛小李取胜的概率均为 $p(0<p<1)$.

①记小李以 3∶1 取胜的概率为 $f(p)$. 若当 $p=p_0$时，$f(p)$取最大值，求 p_0的值；

②若以①中 p_0的值作为 p 的值，这轮比赛小李所得积分为 X，求 X 的分布列及均值.

18.（本小题满分 17 分）

已知 $B(-2,0)$，$C(2,0)$为△ABC的两个顶点，P为△ABC的重心，边 AC，AB 上的两条中线长度之和为 $3\sqrt{6}$.

(1)求点 P 的轨迹 Γ 的方程；

(2)过 C 作不平行于坐标轴的直线交 Γ 于 D，E 两点，若 $DM\perp x$ 轴于垂足 M，$EN\perp x$ 轴于垂足 N，直线 DN 与 EM 交于点 Q.

①求证：点 Q 在一条定直线上，并求此定直线；

②求△DEQ 面积的最大值.

19.（本小题满分 17 分）

给出下列两个定义：

Ⅰ．对于函数 $y=f(x)$，定义域为 D，且其在 D 上是可导的，若其导函数定义域也为 D，则称该函数是"同定义函数"．

Ⅱ．对于一个"同定义函数"$y=f(x)$，若有以下性质：

①$f'(x)=g(f(x))$；②$f(x)=h(f'(x))$，其中 $y=g(x)$，$y=h(x)$ 为两个新的函数，$y=f'(x)$ 是 $y=f(x)$ 的导函数．

我们将具有其中一个性质的函数 $y=f(x)$ 称之为"单向导函数"，将两个性质都具有的函数 $y=f(x)$ 称之为"双向导函数"，将 $y=g(x)$ 称之为"自导函数"．

(1)判断函数 $y=\tan x$ 和 $y=\ln x$ 是"单向导函数"，或者"双向导函数"，说明理由．如果具有性质①，则写出其对应的"自导函数"；

(2)已知命题 p：$y=f(x)$ 是"双向导函数"且其"自导函数"为常值函数，命题 q：$f(x)=k\cdot a^x$ $(k\in\mathbf{R},a>0,a\neq 1)$．判断命题 p 是 q 的什么条件，证明你的结论；

(3)已知函数 $f(x)=(x^a-b)e^x$．

①若 $f(x)$ 的"自导函数"是 $y=x$，试求 a 的取值范围；

②若 $a=b=1$，且定义 $I(x)=e^x f(x)-\frac{4}{3}kx^3+kx$，若对任意 $k\in[1,2]$，$x\in[0,k]$，不等式 $I(x)\leqslant c$ 恒成立，求 c 的取值范围．