2023—2024 学年度上期高 2024届期末考试文科数学参考答案及评分标准

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	B	B	B	C	B	D	D	B	C	A

二、填空题:

13. 3 或 $\dfrac{8}{3}$　　14. 6　　15. $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$　　16. 8

三、解答题:

17.解：（1）在 ΔABC 中，由正弦定理及题设得 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$，

故 $\dfrac{1}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sin 150^\circ}$，解得 $\sin B=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$，……………………………………3 分

又 $0^\circ<B<30^\circ$，所以 $\cos B=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$．……………………………………6 分

（2）设 $AD=x$，则 $CD=x$，$BD=2x$，因为 $\angle ADC=\pi-\angle BDC$，所以 $\cos\angle ADC=-\cos\angle BDC$，

由余弦定理得 $\dfrac{4x^2+x^2-7}{4x^2}=-\dfrac{2x^2-1}{2x^2}$，所以 $x^2=1$，解得 $x=1$ 或 $x=-1$（舍去），

所以 ΔACD 为等边三角形，所以 $A=60^\circ$，……………………………………10 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times AB\times AC\sin A=\dfrac{1}{2}\times 3\times 1\times \sin 60^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$．……………………12 分

18. 解：（1）由已知得 2×2 列联表补充如下：

	物理类	历史类	合计
男生	35	15	50
女生	25	25	50
合计	60	40	100

……………………………………………2 分

假设为 H_0：选科分类与性别无关联，

因为 $K^2=\dfrac{100\times(35\times 25-25\times 15)^2}{60\times 40\times 50\times 50}=\dfrac{25}{6}\approx 4.16>3.841$，……………………………5 分

根据小概率值 0.05 的独立性检验，推断 H_0 不成立，……………………6 分

即认为选科分类与性别有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.05；

（2）由已知，50 名女学生中选择物理类和选择历史类的比例为 $1:1$，

因此抽取 6 名女生中，选择物理类和选择历史类的人数均为 3 名．……………8 分

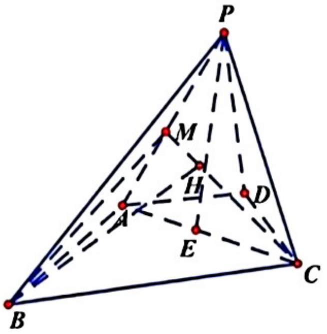
通过枚举，6 名女生随机抽取四人一共有 15 种情况，其中含 2 名选择历史女生情况有 9 种

……………10 分

设面对面访谈的女生中选择历史类的人数为 X，则 $P(X=2)=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$

所以面对面访谈的女生中选择历史类的人数为 2 的概率为 $\dfrac{3}{5}$．…………12 分

19.



（1）证明：由题意可得 $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=2$，$AB=\sqrt{2+2}=2$，$BC=2\sqrt{2}$，所以 $AB^2+AC^2=BC^2$，即 $AB\perp AC$

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 PAC，且满足平面 $PAC\cap$ 平面 $ABCD=AC$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$　所以 $AB\perp$ 平面 PAC，又因为 $PC\subset$ 平面 PAC，

所以 $PC\perp AB$　…………………4 分

（2）解：因为 M 为 PA 的中点，则三棱锥 $C-PBM$ 的体积等于三棱锥 $C-ABM$ 的体积，三棱锥 $C-ABM$ 的体积等于 $M-ABC$ 的体积，

由题意可得因为 $PA=PC=\frac{\sqrt{5}}{2}AC=\sqrt{5}$，

如图，过 P 作 $PE\perp AC$ 于 E，过 B 作 $BH\perp MC$ 于 H

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 PAC，所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$

因为 M 是 PA 的中点，设 M 到平面 $ABCD$ 的距离为 d_1

则满足 $d_1=\frac{1}{2}PE=1$，ΔABC 的面积 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$，则三棱锥 $M-ABC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 1=\frac{2}{3}$

综上，三棱锥 $C-PBM$ 的体积为 $\frac{2}{3}$

20．(1) 解：当 $a=1$ 时，$f(x)=x\ln x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2x}+2$，则 $f'(x)=\ln x+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}$，注意到 $f'(1)=0$，

此时令 $g(x)=\ln x+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}$，则 $g'(x)=\frac{x^2-1}{x^3}$ 且满足 $g(1)=0$　…………………2 分

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

所以当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取得极小值即最小值 0，所以 $\forall x\in(0,+\infty)$，$g(x)\geq 0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$…………………5 分

(2) 解：由于 $f(2)=2a\ln 2-3-\frac{1}{4}+2>0$，易知 $a>0$

①当 $a\geq 1$ 时，对 $\forall x\in[1,+\infty)$，$f(x)=ax\ln x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2x}+2\geq x\ln x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2x}+2$

由（1）可得此时 $f(x)\geq 0$ 恒成立，所以 $a\geq 1$ 满足条件　…………………………8 分

②当 $0<a<1$ 时，$f'(x)=a(\ln x+1)-\frac{3}{2}+\frac{1}{2x^2}$，令 $h(x)=a(\ln x+1)-\frac{3}{2}+\frac{1}{2x^2}$，

则 $h'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^3}=\frac{ax^2-1}{x^3}=\frac{a\left(x+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)}{x^3}$，其中 $\sqrt{\frac{1}{a}}>1$

当 $x\in\left(1,\sqrt{\frac{1}{a}}\right)$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 单调递减，则 $h(x)<h(1)=a-1<0$，即 $f'(x)<0$

此时 $f(x)$ 单调递减，则 $f(x)<f(1)=0$，不满足题意　…………………………11 分

综上所述，a 的取值范围为 $[1,+\infty)$　…………………………12 分

21.解：（1）由题意可得：$2b=4\sqrt{2}$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{3}$，$a^2=b^2+c^2$．联立解得：$b=2\sqrt{2}$，$c=1$，$a=3$．

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$．　　……………………………………………4 分

（2）$A(-3,0)$，$B(3,0)$，$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，设 F_1M 的方程为：$x=my-1$，$M(x_1,\ y_1)$，$(y_1>0)$，直线 F_1M 与椭圆的另一个交点为 $M'(x_2,\ y_2)$．

$\because F_1M\,//\,F_2N$，根据对称性可得：$N(-x_2,\ -y_2)$．　　…………………………………5 分

联立 $\begin{cases}8x^2+9y^2=72\\x=my-1\end{cases}$，化为：$(8m^2+9)y^2-16my-64=0$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{16m}{8m^2+9}$，$y_1y_2=\dfrac{-64}{8m^2+9}$，　　……………………………………7 分

$\because 3k_1+2k_2=0$，$\therefore \dfrac{3y_1}{my_1+2}+\dfrac{2y_2}{my_2+2}=0$，即 $5my_1y_2+6y_1+4y_2=0$，　　………8 分

联立解得：$y_1=\dfrac{128m}{8m^2+9}$，$y_2=\dfrac{-112m}{8m^2+9}$，　　…………………………………9 分

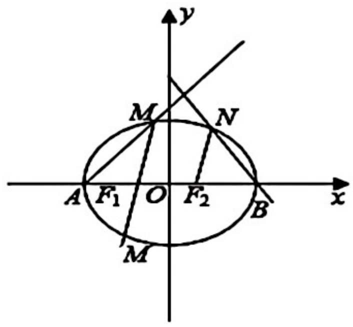
$\because y_1>0$，$y_2<0$，$\therefore m>0$．

$\therefore y_1y_2=\dfrac{128m}{8m^2+9}\cdot\dfrac{-112m}{8m^2+9}=\dfrac{-64}{8m^2+9}$，

$\therefore m=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{12}$．又 $m>0$，$\therefore m=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$．　　…………11 分

$\therefore$ 直线 F_1M 的方程为 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{12}y-1$，

即 $2\sqrt{6}x+y+2\sqrt{6}=0$．　　……………………………12 分



22．解：（1）由 $\rho=2\cos\theta$，得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$．将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入得，$x^2+y^2=2x$，

所以 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$．　　…………………………………………5 分

（2）设 A,B 所对应的参数分别为 t_1,t_2，

因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\y=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

所以 $M\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 在 l 上，把 l 的参数方程代入 $(x-1)^2+y^2=1$，可得 $t^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\dfrac{3}{4}=0$，

所以 $\Delta=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-4\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{15}{4}>0$，且 $t_1+t_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2},t_1t_2=-\dfrac{3}{4}<0$，　　………………………7 分

故 $\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}=\dfrac{|MA|+|MB|}{|MA|\cdot|MB|}=\dfrac{|t_1|+|t_2|}{|t_1||t_2|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$．　　………………10 分

23.（1）解：根据题意，函数 $f(x)=|2x-1|+x+\frac{1}{2}=\begin{cases}3x-\frac{1}{2}, x\geqslant\frac{1}{2},\\ -x+\frac{3}{2}, x<\frac{1}{2},\end{cases}$，

所以 $f(x)$ 为在 $(-\infty,\frac{1}{2}]$ 单调递减，在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x)_{min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，即 $m=1$. ……………………………………5 分

（2）证明：由（1）知，$m=1$，所以 $a+b+c=1$，

又因为 a，b，c 为正实数，$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$a^2+c^2\geqslant 2ac$，

所以 $2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ac)$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$，

所以 $1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$. ………………10 分