2024 年普通高等学校招生全国统一考试考前演练二

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	D	B	C	A	B	A	B	D	ABD	AC	BCD

一、选择题(本大题共 **8** 小题,每小题 **5** 分,共 **40** 分.)

1. D 【**解析**】由 $B=\{x|x^2+x=0\}$,得 $B=\{0,-1\}$,又集合 $A=\{0,1,2\}$,所以 $A\cup B=\{-1,0,1,2\}$,故选 D.

2. B 【**解析**】因为 $z=\frac{2+i}{1+i}=\frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$,所以复数 z 的实部与虚部之和 $\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=1$,故选 B.

3. C 【**解析**】因为相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{-8.4}{\sqrt{10\times7.06}}\approx-1.$

即相关系数近似为 -1,y 与 x 负相关,且相关程度相当高,从而可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系.所以选项 ABD 错误,C 正确.故选 C.

4. A 【**解析**】因为 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant5$,由题意知 $2^3C_n^3=2^4C_n^4$,

得 $2^3\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=2^4\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$,求得 $n=5$,故选 A.

5. B 【**解析**】由已知 $y=f(x)$ 为偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,又 $f(2-x)=f(x)$,所以 $f(2-x)=f(-x)$,所以 $f(2+x)=f(x)$,所以函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,$f(21)=f(2\times10+1)=f(1)=1-\log_2 1=1$.故选 B.

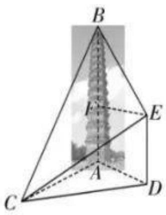
6. A 【**解析**】由抛物线的定义可知,$|PF|=4=2+\frac{p}{2}$,所以 $p=4$,所以抛物线的方程为 $y^2=8x$,过点 P 作 PP' 垂直抛物线的准线,垂足为 P',则 $|PM|+|PF|=|PM|+|PP'|\geqslant|MP'|\geqslant4+2=6$,当且仅当 P'、P 和 M 三点共线时等号成立,故选 A.

7. B 【**解析**】过点 E 作 $EF\perp AB$,交 AB 于点 F,

在 Rt$\triangle ECD$ 中,因为 $\angle ECD=30^\circ$,所以 $DE=CD\tan\angle DCE=18\times\tan30^\circ=6\sqrt{3}$,

在 Rt$\triangle BEF$ 中,因为 $\angle BEF=60^\circ$,所以 $BF=EF\tan\angle FEB=15\times\tan60^\circ=15\sqrt{3}$,

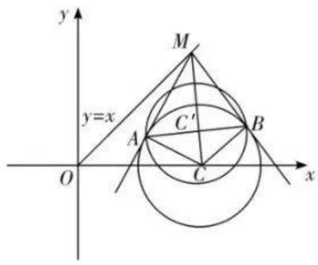
则 $AB=BF+AF=BF+ED=15\sqrt{3}+6\sqrt{3}=21\sqrt{3}\approx36.4(\mathrm{m})$.故选 B.



8. D 【**解析**】依题意圆 C' 是以 AB 为直径的圆,当 $|AB|$ 最大时,圆 C' 的面积最大,

因为 $S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|AB|}{2}\cdot|MC|=\frac{1}{2}\cdot|AM|\cdot|AC|$,

得 $|AB|=\frac{2|MA||AC|}{|MC|}=\frac{4\sqrt{|MC|^2-4}}{|MC|}=4\sqrt{1-\frac{4}{|MC|^2}}$,又 $2\sqrt{2}\leqslant|MC|\leqslant4$,当 $|MC|=4$ 时,此时 $M(0,0)$ 或 $M(4,4)$,$|AB|$ 取最大值 $2\sqrt{3}$,所以圆 C' 的面积最大值为 $\pi\cdot(\sqrt{3})^2=3\pi$,故选 D.



二、选择题（本大题共 **3** 小题，每小题 **6** 分，共 **18** 分.）

9. ABD **【解析】**依题意函数 $f(x)$ 的周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以选项 A 正确；

因为 $f(0)=\frac{1}{2}$，即 $\cos\varphi=\frac{1}{2}$，又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以选项 B 正确；

因为 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，又 $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(2\times\left(-\frac{5\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right)=\cos(-2\pi)=1$，所以选项 C 错误；

因为 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<2x-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}<\pi$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，所以选项 D 正确，故选 ABD.

10. AC **【解析】**$\because f(x)$ 为偶函数，$\therefore f(-x)=f(x)$，又 $\because g(x)$ 为奇函数，$\therefore g(-x)=-g(x)$，

$\because f(x)+g(x)=2e^{x}$，①$\therefore f(-x)+g(-x)=2e^{-x}$，即 $f(x)-g(x)=2e^{-x}$，②

由 $\frac{①+②}{2}$ 得：$f(x)=e^{x}+e^{-x}$，所以选项 A 正确；

因为函数 $y=e^{x}$，$y=-e^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上均为增函数，故 $g(x)=e^{x}-e^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以选项 B 错误；

因为 $f(2x)=e^{2x}+e^{-2x}=(e^{x}+e^{-x})^2-2$，所以 $F(x)=(e^{x}+e^{-x})^2-2m(e^{x}+e^{-x})-2$，

又 $f(x)=e^{x}+e^{-x}\geqslant 2\sqrt{e^{x}e^{-x}}=2$，当 $e^{x}=e^{-x}$，即 $x=0$ 时等号成立，令 $t=e^{x}+e^{-x}\in[2,+\infty)$，

设 $h(t)=t^2-2mt-2=(t-m)^2-m^2-2$，对称轴 $t=m$，

(1)当 $m>2$ 时，函数 $h(t)$ 在 $[2,m)$ 上为减函数，在 $(m,+\infty)$ 上为增函数，

则 $h(t)_{\min}=h(m)=-m^2-2=-11$，解得 $m=3$ 或 $m=-3$（舍）；

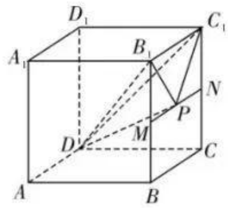
(2)当 $m\leqslant 2$ 时，$h(t)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，$h(t)_{\min}=h(2)=2-4m=-11$，解得：$m=\frac{13}{4}>2$，不符合题意.

综上 $m=3$，所以选项 C 正确，D 错误. 故选 AC.

11. BCD **【解析】**对于选项 A，因为 $AA_1//CC_1$，又点 P 与顶点 C_1 重合，所以 $\angle DC_1C$ 是异面直线 AA_1 与 DP 所成角，其大小为 45°，故选项 A 错误；

对于选项 B，因为 M,N 是侧棱 BB_1,CC_1 的中点，所以 $MN//B_1C_1$，又点 P 在线段 MN 上，

所以三棱锥 C_1-PDB_1 的体积 $V_{C_1-PDB_1}=V_{D-PC_1B_1}=\frac{1}{3}\times2\times\frac{1}{2}\times2\times1=\frac{2}{3}$（定值），故 B 正确；



对于选项 C，因为点 P 在线段 B_1C 上，连接 AC,AB_1,BD,B_1D_1，

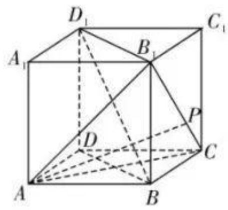
因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，则 $BB_1\perp AC$，又因为 $ABCD$ 为正方形，则 $BD\perp AC$，

且 $BB_1\cap BD=B$，$BB_1,BD\subset$ 平面 BB_1D_1D，则 $AC\perp$ 平面 BB_1D_1D，

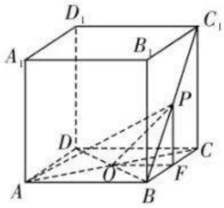
且 $BD_1\subset$ 平面 BB_1D_1D，可得 $AC\perp BD_1$，同理可得 $AB_1\perp BD_1$，

且 $AC\cap AB_1=A$，$AC,AB_1\subset$ 平面 AB_1C，则 $BD_1\perp$ 平面 AB_1C，

因为 $AP\subset$ 平面 AB_1C，所以 $AP\perp BD_1$，故 C 正确；



对于选项 D，因为点 P 为 BC_1 的中点，连接 BD，记 AC 与 BD 的交点为 O，取 BC 的中点为 F，连接 PF,OF，则 $OP=\sqrt{OF^2+PF^2}=\sqrt{2}$，又 $OA=OB=OC=\sqrt{2}$，所以点 O 为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的圆心，所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为 $\sqrt{2}$，所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$，故 D 正确. 故选 BCD.



三、填空题(本大题共3小题,每小题5分,共15分.)

12. $\frac{1}{3}$ 【解析】由题意可得:$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\lambda\overrightarrow{AC}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{b}+(1-\lambda)\boldsymbol{c}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$. 所以 $\lambda=\frac{1}{3}$.

13. $\frac{23}{25}$ 【解析】$\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=1-2\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{23}{25}$.

14. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{7}}{4}\right]$ 【解析】因为$|PF_1|=m|PF_2|$,由椭圆的定义可得$|PF_1|+|PF_2|=(m+1)|PF_2|=2a$,

所以$|PF_2|=\frac{2a}{m+1}$,$|PF_1|=\frac{2ma}{m+1}$. 又因为$\angle F_1PF_2=60^\circ$,由余弦定理可得:

$\left(\frac{2a}{m+1}\right)^2+\left(\frac{2ma}{m+1}\right)^2-2\frac{2a}{m+1}\cdot\frac{2ma}{m+1}\cos 60^\circ=4c^2$. 化简得$\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{3m}{(m+1)^2}=1-\frac{3}{m+\frac{1}{m}+2}$,

又因为函数$f(m)=m+\frac{1}{m}+2$在区间$[2,3]$上单调递增,所以$\frac{9}{2}\leqslant m+\frac{1}{m}+2\leqslant\frac{16}{3}$,

所以$\frac{1}{3}\leqslant\frac{c^2}{a^2}\leqslant\frac{7}{16}$,可得$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant e\leqslant\frac{\sqrt{7}}{4}$,所以椭圆$C$的离心率取值范围为$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{7}}{4}\right]$.

四、解答题(本大题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

15.【解析】(1)由题意,设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1,公差为d,又$a_4=7$,$S_9=81$,

所以$\begin{cases}a_1+3d=7,\\9a_1+\frac{9\times8}{2}d=81,\end{cases}$ ······ 2分

解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$ 故$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$. ······ 3分

因为数列$\{b_n\}$为各项为正的递增数列,设公比为q,且$q>1$,

因为$b_1b_2b_3=8$,所以$b_1^3q^3=8$,得$b_1q=2=b_2$, ······ 4分

又$b_1+b_2+b_3=7$,所以$\frac{2}{q}+2+2q=7$,即$(2q-1)(q-2)=0$, ······ 5分

解得$q=2$,从而$b_1=1$,所以$b_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$. ······ 6分

(2)由(1)得$c_n=\begin{cases}-(2n-1)2^n,n\text{为奇数},\\(2n-1)2^{n-1},n\text{为偶数},\end{cases}$ ······ 7分

所以$c_{2n-1}+c_{2n}=-(4n-3)2^{2n-1}+(4n-1)2^{2n-1}=2^{2n}$, ······ 9分

所以数列$\{c_n\}$的前$2n$项和$S_{2n}=c_1+c_2+c_3+c_4+\cdots+c_{2n-1}+c_{2n}$

$=(c_1+c_2)+(c_3+c_4)+\cdots+(c_{2n-1}+c_{2n})=2^2+2^4+\cdots+2^{2n}$ ······ 11分

$=\frac{2^2(1-4^n)}{1-4}=\frac{2^{2n+2}-4}{3}\left(\text{或}\frac{4^{n+1}-4}{3}\right)$. ······ 13分

16.【解析】(1)连接BE,则$BC=\frac{1}{2}AD=DE$,因为$AD/\!/BC$,$AD\perp DC$,

所以四边形$BCDE$为矩形,所以$BE=CD=2$, ······ 2分

因为$PA=PD=2\sqrt{2}$,且E为AD的中点,所以$PE\perp AD$,且$PE=\sqrt{PA^2-DE^2}=2$, ······ 4分

所以$PE^2+BE^2=2^2+2^2=8=PB^2$,即$PE\perp BE$, ······ 6分

又因为$AD\cap BE=E$,所以$PE\perp$平面$ABCD$,

又$PE\subset$平面PAD,所以平面$PAD\perp$平面$ABCD$. ······ 7分

(2)以 E 为原点,EA 为 x 轴,EB 为 y 轴,EP 为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(2,0,0)$,$B(0,2,0)$,$M(-1,2,0)$,$P(0,0,2)$,设 $EN=t$,则 $N(0,0,t)$, ······ 8 分

所以 $\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{AP}=(-2,0,2)$,

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-2x_1+2y_1=0,\\ -2x_1+2z_1=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$, ······ 10 分

又 $\overrightarrow{AM}=(-3,2,0)$,$\overrightarrow{AN}=(-2,0,t)$,

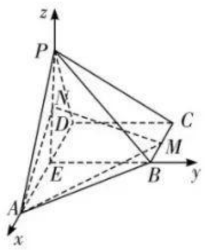
设平面 AMN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-3x_2+2y_2=0,\\ -2x_2+tz_2=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=\left(t,\dfrac{3t}{2},2\right)$, ······ 12 分

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{t+\dfrac{3t}{2}+2}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\times\sqrt{t^2+\dfrac{9t^2}{4}+2^2}}=\dfrac{3\sqrt{87}}{29}$, ······ 14 分

所以 $t=1$,或 $t=\dfrac{104}{41}$(舍),

线段 EN 的长为 1. ······ 15 分



17.【解析】(1)(ⅰ)记 A_i 表示事件"第 i 局公牛队获胜",B_i 表示事件"球员李明第 i 局没有被罚出场",$i=1,2,3$. ······ 1 分

由全概率公式公牛队每局比赛获胜的概率为

$P_0=P(B_i)P(A_i|B_i)+P(\overline{B_i})P(A_i|\overline{B_i})=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$. ······ 4 分

(ⅱ)由已知随机变量 X 的可能取值为 2,3. ······ 5 分

$P(X=2)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$, ······ 6 分

$P(X=3)=C_2^1\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\dfrac{2}{3}+C_2^1\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{9}$, ······ 7 分

随机变量 X 的分布列如下表:

X	2	3
P	$\dfrac{5}{9}$	$\dfrac{4}{9}$

$E(X)=2\times\dfrac{5}{9}+3\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{22}{9}$. ······ 8 分

(2)依题意事件 A 擂王公牛队 2∶0 获得挑战赛胜利的可能情形是:两局比赛李明均没有被罚出场;第一局李明没有被罚出场,第二局被罚出场;第一局李明被罚出场,第二局不能参加比赛.

所以 $P(A)=\left[(1-p)\cdot\dfrac{3}{4}\right]^2+(1-p)\cdot\dfrac{3}{4}\cdot p\cdot\dfrac{1}{2}+p\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$ ······ 10 分

$=\dfrac{1}{16}\left[3\left(p-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{11}{3}\right]$. ······ 12 分

又 $p\in\left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right]$，则当 $p=\frac{1}{2}$ 时 $P_{\min}(A)=\frac{23}{64}$. ………… 14 分

即事件 A 的概率的最小值为$\frac{23}{64}$. ………… 15 分

18.【解析】(1)因为 $|PF_1|-|PF_2|=4$，所以 $2a=4$，得 $a=2$， ………… 1 分

又三角形 PF_1F_2 的面积为$\sqrt{5}$，得$\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_0|=\sqrt{2^2+b^2}|y_0|=\sqrt{5}$，所以 $|y_0|=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4+b^2}}$，得 $P\left(2\sqrt{2},\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4+b^2}}\right)$，………… 3 分

代入双曲线方程得$\frac{(2\sqrt{2})^2}{4}-\frac{\frac{5}{4+b^2}}{b^2}=1$，得 $b^2=1$，$b^2=-5$(舍)，………… 5 分

所以双曲线 E 的方程为：$\frac{x^2}{4}-y^2=1$. ………… 6 分

(2)由题意，$M(1,0)$，且 l_1，l_2 斜率存在且不为 0，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，$l_1:x=m_1y+1$，$l_2:x=m_2y+1$，

由几何性质可知$|m_1|>2$，$|m_2|>2$，………… 7 分

联立方程$\begin{cases}x^2-4y^2-4=0,\\x=m_1y+1,\end{cases}$得$(m_1^2-4)y^2+2m_1y-3=0$，………… 8 分

$\Delta>0$ 恒成立，$y_1+y_2=\frac{-2m_1}{m_1^2-4}$，$y_1y_2=\frac{-3}{m_1^2-4}$，

同理可得：$y_3+y_4=\frac{-2m_2}{m_2^2-4}$，$y_3y_4=\frac{-3}{m_2^2-4}$，………… 9 分

直线 AC 方程：$y-y_1=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}(x-x_1)$，

令 $x=1$，得 $y_G=y_1+\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}(1-x_1)=y_1-m_1y_1\frac{y_3-y_1}{m_2y_3-m_1y_1}=\frac{(m_2-m_1)y_1y_3}{m_2y_3-m_1y_1}$，

同理：$y_H=\frac{(m_2-m_1)y_2y_4}{m_2y_4-m_1y_2}$，………… 11 分

因为 $y_G+y_H=\frac{(m_2-m_1)y_1y_3}{m_2y_3-m_1y_1}+\frac{(m_2-m_1)y_2y_4}{m_2y_4-m_1y_2}$

$=(m_2-m_1)\frac{y_1y_3(m_2y_4-m_1y_2)+y_2y_4(m_2y_3-m_1y_1)}{(m_2y_3-m_1y_1)(m_2y_4-m_1y_2)}$

$=(m_2-m_1)\frac{m_2y_3y_4(y_1+y_2)-m_1y_1y_2(y_3+y_4)}{(m_2y_3-m_1y_1)(m_2y_4-m_1y_2)}$ ………… 15 分

$=(m_2-m_1)\frac{\frac{-3m_2}{m_2^2-4}\cdot\frac{-2m_1}{m_1^2-4}-\frac{-3m_1}{m_1^2-4}\cdot\frac{-2m_2}{m_2^2-4}}{(m_2y_3-m_1y_1)(m_2y_4-m_1y_2)}=0$，………… 16 分

所以 $y_G=-y_H$，所以$\frac{|MG|}{|MH|}=\frac{|y_G|}{|y_H|}=1$. ………… 17 分

19.【解析】(1)因为 $f(x)=e^x-3x$，所以 $f'(x)=e^x-3$， ………… 1 分

当 $x<\ln 3$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x>\ln 3$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

所以 $f_{\min}(x)=f(\ln 3)=e^{\ln 3}-3\ln 3=3(1-\ln 3)<0$，………… 3 分

又 $f(0)=e^0=1>0$，$f(2)=e^2-6>0$，所以 $f(x)$ 有两个不同零点. ………… 5 分

(2)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-3x$，由 $f(x)\geqslant\cos x-2x$，得 $e^x-x\geqslant\cos x$，

令 $h(x)=e^x-x$，则 $h'(x)=e^x-1$，………… 7 分

当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数，当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $h(x)\geqslant h(0)=1$，而 $\cos x\leqslant 1$，且 $h(0)=\cos 0$，

所以 $e^x-x\geqslant\cos x$，即 $f(x)\geqslant\cos x-2x$. ………… 9 分

(3)由已知 $f(x)\geqslant 1-2\sin x$，即 $a^2e^x-3ax+2\sin x-1\geqslant 0$，

因为 $a\in[1,+\infty)$，令 $g(a)=e^xa^2-3xa+2\sin x-1$ 为开口向上的二次函数，对称轴为 $a=\frac{3x}{2e^x}$，

令 $\varphi(x)=\frac{3x}{2e^x}$，所以 $\varphi'(x)=\frac{3(1-x)}{2e^x}$， …………………………………… 10 分

当 $x<1$ 时，$\varphi'(x)>0$，函数 $\varphi(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)<0$，函数 $\varphi(x)$ 单调递减，所以 $\varphi_{\max}(x)=\varphi(1)=\frac{3}{2e}<1$，
…………………………………… 11 分

即 $a=\frac{3x}{2e^x}\leqslant\frac{3}{2e}<1$，故 $g(a)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(a)\geqslant g(1)=e^x-3x+2\sin x-1$， …………………………………… 12 分

从而只需证明 $e^x-3x+2\sin x-1\geqslant 0$ 即可，即证 $\frac{3x-2\sin x+1}{e^x}-1\leqslant 0$，

令 $F(x)=\frac{3x-2\sin x+1}{e^x}-1$，则 $F'(x)=\frac{2-3x+2\sin x-2\cos x}{e^x}$， …………………………………… 13 分

令 $q(x)=2-3x+2\sin x-2\cos x$，

则 $q'(x)=-3+2\cos x+2\sin x=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-3<0$，

所以函数 $q(x)$ 单调递减，且 $q(0)=0$， …………………………………… 15 分

所以当 $x<0$ 时，$F'(x)>0$，当 $x>0$ 时，$F'(x)<0$，

所以函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减， …………………………………… 16 分

故 $F(x)\leqslant F(0)=0$，即 $\frac{3x-2\sin x+1}{e^x}-1\leqslant 0$，

从而不等式 $a^2e^x-3ax+2\sin x-1\geqslant 0$ 得证. …………………………………… 17 分