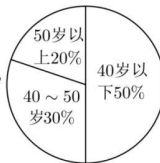


树德中学高 2021 级高三上学期期末测试数学（理科）试题

(考试时间: 120 分钟 试卷满分: 150 分)

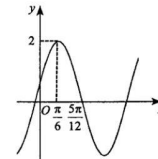
一、选择题: 本大题共 12 个小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

- 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$, $B = \{x | y = \log_2(x-1)\}$, 则 $A \cup B =$ ()
A. $(-1, 1)$ B. $(-1, 3)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$
- 在复平面内, 复数 z_1, z_2 对应的点分别是 $(2, -1), (1, -3)$, 则 $\frac{z_2}{z_1}$ 的模是 ()
A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. 5
- 已知圆锥的母线长为 $2\sqrt{2}$, 其侧面展开图为一个半圆, 则该圆锥的底面半径为 ()
A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 下列叙述错误的是 ()
A. 命题 “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 1 \leq -1$ ” 的否定是 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 1 > -1$ ”
B. 若幂函数 $y = (m^2 - 2m - 2)x^{2-4m}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 m 的值为 -1
C. $\forall x \in (0, +\infty), 2^x > \log_2 x$
D. 设 $a \in \mathbf{R}$, 则 “ $a^2 > 3$ ” 是 “ $a > \sqrt{3}$ ” 的充分不必要条件
- 平面直角坐标系内, 与点 $A(1, 1)$ 的距离为 1 且与圆 $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$ 相切的直线有 ()
A. 0 条 B. 4 条 C. 2 条 D. 3 条
- 小明参加某射击比赛, 射中得 1 分, 未射中扣 1 分, 已知他每次射中的概率为 $\frac{2}{3}$, 记小明射击 2 次的得分为 X , 则 $D(X) =$ ()
A. $\frac{8}{9}$ B. $\frac{16}{9}$ C. $\frac{20}{9}$ D. $\frac{26}{9}$
- 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线过点 $P(2, 4\sqrt{6})$, F_1, F_2 是 C 的左右焦点, 且焦点到渐近线的距离为 $2\sqrt{6}$, 若双曲线上一点 P 满足 $|PF_1| = 5$, 则 $|PF_2| =$ ()
A. 3 或 7 B. 7 C. 5 D. 3
- 某中学 200 名教师年龄分布图如图所示, 从中随机抽取 40 名教师作样本, 采用系统抽样方法, 按年龄从小到大编号为 1~200, 分为 40 组, 分别为 1~5, 6~10, ..., 196~200. 若从第 4 组抽取的号码为 18, 则样本中 40~50 岁教师的编号之和为 ()
A. 906 B. 966 C. 1506 D. 1566



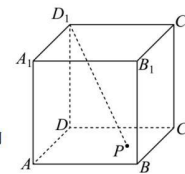
- 若 $(\frac{2}{x} - x^2)^6$ 展开式中最大的二项式系数为 a , 则直线 $y = \frac{3}{20}ax$ 与曲线 $y = x^2$ 围成图形的面积为 ()
A. $\frac{9}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

- 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}, A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象



- 如图所示, 则下列说法正确的是 ()
- $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为 $-\sqrt{3}$
 - $f(x + \frac{\pi}{6})$ 为偶函数
 - $f(x)$ 图象的对称中心是 $(-\frac{\pi}{12} + k\pi, 0)$, $k \in \mathbf{Z}$
 - $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到 $y = A \sin 2x$ 的图象

- 如图, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, P 为底面正方形 $ABCD$ 内 (含边界) 的一动点, 则下列结论中:



- ①若点 Q 为 CC_1 的中点, 则 $|PA_1| + |PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{17}$; ②过点 P 作与 AD_1 和 BA_1 都成 $\frac{\pi}{6}$ 的直线, 可以作四条; ③若点 P 为 BC 的中点时, 过点 C 作与直线 D_1P 垂直的平面 α , 则平面 α 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的截面周长为 $2\sqrt{2} + \sqrt{5}$; ④若点 P 到直线 BB_1 与到直线 AD 的距离相等, CD 的中点为 E , 则点 P 到直线 AE 的最短距离是 $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. 其中正确的命题有 ()
A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ |\ln(x-1)|, & x > 1 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = m|x-1|$ 有 5 个不同的实数根, 且最小的两个实数根为 x_1, x_2 , 则 $x_1^2 + x_2^2$ 的取值范围是 ()
A. $(0, \frac{2e-1}{e^2})$ B. $(0, \frac{2e+1}{e^2})$ C. $(\frac{1}{e}, \frac{2e+1}{e^2})$ D. $(\frac{2e-1}{e^2}, \frac{2}{e})$

二、填空题 (每题 5 分, 满分 20 分, 将答案填在答题卡上)

- 已知 $\vec{a} = (-1, 2)$, $\vec{b} = (2, 3)$, 则 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影等于 _____.
- 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y-1 \leq 0 \\ 2x+y+1 \geq 0 \\ x-2y+3 \geq 0 \end{cases}$, 则 $\frac{y+3}{x+2}$ 的取值范围为 _____.
- 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 到准线的距离为 4, 点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 在抛物线 C 上, 若 $(y_1 - 2y_2)(y_1 + 2y_2) = 48$, 则 $\frac{|MF|}{|NF|} =$ _____.

16. 在锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 所对的边为 a, b, c , 且 $2b \sin C - \sqrt{2}c \cos C = 2c \sin C \cos A$.
若点 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, 则 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle HBC}}$ 的最小值为_____.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 12 分) 某汽车销售店以 8 万元每辆的价格购进了某品牌的汽车. 根据以往的销售分析得出, 当售价定为 10 万元/辆时, 每年可销售 100 辆该品牌的汽车, 且每辆汽车的售价每提高 1 千元时, 年销售量就减少 2 辆.

- (1) 若要获得最大年利润, 售价应定为多少万元/辆?
(2) 该销售店为了提高销售业绩, 推出了分期付款的促销活动. 已知销售一辆该品牌的汽车, 若一次性付款, 其利润为 2 万元; 若分 2 期或 3 期付款, 其利润为 2.5 万元; 若分 4 期或 5 期付款, 其利润为 3 万元. 该销售店对最近分期付款的 10 位购车情况进行了统计, 统计结果如下表:

付款方式	一次性	分 2 期	分 3 期	分 4 期	分 5 期
频数	1	1	3	2	3

若 X 表示其中任意两辆的利润之差的绝对值, 求 X 的分布列和数学期望.

18. (本题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2$, 且 $a_{n+1} = 2S_n + 2$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 2$, $(n+2)b_n = nb_{n+1}$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$.
(1) 分别求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 若 $c_n = \frac{2 \cdot a_n}{n+1}$, 求数列 $\{b_n c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分) 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, $AB = 2AD = 2CD = 4$, P 为 AB 的中点, 线段 AC 与 DP 交于 O 点(如图 1). 将 $\triangle ACD$ 沿 AC 折起到 $\triangle ACD'$ 位置, 使得平面 $D'AC \perp$ 平面 BAC (如图 2).

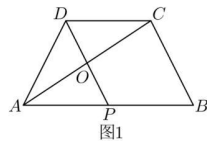


图1

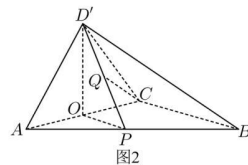


图2

- (1) 求二面角 $A-BD'-C$ 的余弦值;
(2) 线段 PD' 上是否存在点 Q , 使得 CQ 与平面 BCD' 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{8}$? 若存在, 求出 $\frac{PQ}{PD'}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.

20. (本小题满分 12 分) 已知函数 $P(x) = x - \lambda \ln x$, ($\lambda \in \mathbb{R}$).

- (1) 若函数 $y = P(x)$ 只有一个零点, 求实数 λ 的取值所构成的集合;
(2) 已知 $\lambda \in (0, e)$, 若 $f(x) = e^{2x} - x + P(x)$, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $h(\lambda)$, 求 $h(\lambda)$ 的值域.

21. (本小题满分 12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 1)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 上顶点为 A , F_1 到直线 AF_2 的距离为 $\sqrt{3}$, 且 $|AF_2| = 2$.

- (1) 求椭圆 E 的标准方程;
(2) 过 F_2 的直线 m 与椭圆 E 交于 M, N 两点, 过 F_2 且与 m 垂直的直线 n 与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 交于 C, D 两点, 求 $|MN| + |CD|$ 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = 2 + \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$). 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = m$ ($m \in \mathbb{R}$).

- (1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;
(2) 若直线 l 与曲线 C 有 2 个公共点, 求 m 的取值范围.

23. (10 分) 已知函数 $f(x) = |x| + |x-2| + 1$.

- (1) 解不等式 $f(x) \leq 7$;
(2) 若不等式 $mx + 2, f(x) (m > 0)$ 对于 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：
www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



 微信搜一搜

 自主选拔在线