2023-2024 学年第一学期高三年级期末学业诊断数学试卷

参考答案及评分标准

一.单项选择题：C　B　A　B　C　C　A　A

二.多项选择题：9.BD　10.AC　11.ACD　12.ABD

三.填空题：13. $y=\pm 2x$　14.25　15. $\sqrt{3}$　16. e^{3}

四.解答题：

17.解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由题意得 $\begin{cases}a_1+d=3,\\ a_1+7d=3(a_1+2d),\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}a_1=1,\\ d=2,\end{cases}\therefore a_n=2n-1\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$；

当 $n=1$ 时，则 $2S_1=2b_1=3b_1-1$，$\therefore b_1=1$，

当 $n\geq 2$ 时，则 $2S_{n-1}=3b_{n-1}-1$，$\therefore 2S_n-2S_{n-1}=3b_n-3b_{n-1}$，$\therefore b_n=3b_{n-1}$，

$\therefore \{b_n\}$ 是以 1 为首项，3 为公比的等比数列，$\therefore b_n=3^{n-1}\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$；

（2）由（1）得 $c_n=a_nb_n=(2n-1)\cdot 3^{n-1}\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，

$\therefore T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{n-1}+c_n=1\times 1+3\times 3+5\times 3^2+\cdots+(2n-3)\times 3^{n-2}+(2n-1)\times 3^{n-1}$，①

$\therefore 3T_n=1\times 3+3\times 3^2+5\times 3^3+\cdots+(2n-3)\times 3^{n-1}+(2n-1)\times 3^n$，②

①－②得 $-2T_n=1+2\times\left(3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}\right)-(2n-1)\times 3^n$，

$\therefore T_n=(n-1)\times 3^n+1\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$.

18.解：（1）由题意得 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}a\cdot AD\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=3\sqrt{3}$，$\therefore a=6$

$\because \overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\therefore BD=4$，$CD=2$，

$\therefore AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB=12$，$\therefore AB=2\sqrt{3}$，

$\therefore \cos B=\dfrac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\because 0^\circ<B<180^\circ$，$\therefore B=30^\circ$；

（2）由题意得 $BD=CD$，$\therefore \overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\therefore \overrightarrow{AD}^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{4}\left(c^2+b^2+2bc\cos\angle BAC\right)=4$，

$\because b^2+c^2=28$，$\therefore bc\cos\angle BAC=-6$，

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle BAC=40$，$\therefore a=2\sqrt{10}$，

$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle BAC=3\sqrt{3}$，$\therefore bc\sin\angle BAC=6\sqrt{3}$，$\therefore bc=12$，

$\therefore (b+c)^2=b^2+c^2+2bc=52$，$\therefore b+c=2\sqrt{13}$，

$\therefore a+b+c=2(\sqrt{10}+\sqrt{13})$，$\therefore\triangle ABC$ 的周长为 $2(\sqrt{10}+\sqrt{13})$.

19.（1）证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AB\perp AD$，

$\because SA\perp AB$，$SA\cap AD=A$，$\therefore AB\perp$ 平面 SAD，$\therefore SD\perp AB$，

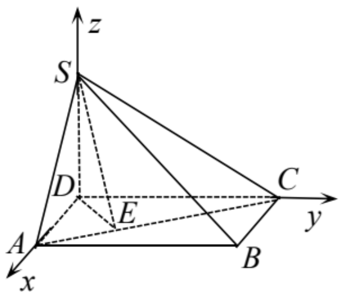
同理可证 $SD\perp BC$，$\because AB\cap BC=B$，$\therefore SD\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore$ 四棱锥 $S-ABCD$ 是一个“阳马”;

（2）由（1）得 $SD\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore SD\perp AD$，

$\because SA=3\sqrt{2}$，$AB=3$，$\therefore SD=3$，

以点 D 为原点，DA，DC，DS 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



由题意可得 $D(0,0,0)$，$A(3,0,0)$，$B(3,3,0)$，$C(0,3,0)$，$S(0,0,3)$，

$\because AE=\lambda EC$，$\therefore E\left(\dfrac{3}{1+\lambda},\dfrac{3\lambda}{1+\lambda},0\right)$，

设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 SAE 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\perp\overrightarrow{AC},\\ \vec{m}\perp\overrightarrow{SA},\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}-3x_1+3y_1=0,\\ 3x_1-3z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$，则 $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=1,\end{cases}$，$\therefore \vec{m}=(1,1,1)$，

设 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 SDE 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{SD},\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{DE},\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}3z_2=0,\\ \dfrac{3}{1+\lambda}x_2+\dfrac{3\lambda}{1+\lambda}y_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=-1$，则 $\begin{cases}x_2=\lambda,\\ z_2=0,\end{cases}$，$\therefore \vec{n}=(\lambda,-1,0)$，

$\therefore \cos\langle \vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\lambda-1}{\sqrt{3}\sqrt{\lambda^2+1}}=-\dfrac{\sqrt{30}}{15}$，$\therefore \lambda=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore E\left(\dfrac{9}{4},\dfrac{3}{4},0\right)$，$\therefore DE=\sqrt{\left(\dfrac{9}{4}\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$，

$\because SD\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ 直线 SE 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\dfrac{SD}{DE}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

20.解：（1）设 $A_i=$ “第 i 天选择米饭套餐” $(i=1,2)$，则 $\overline{A_i}=$ “第 i 天选择面食套餐”，

根据题意 $P\left(A_1\right)=\dfrac{2}{3}$，$P\left(\overline{A_1}\right)=\dfrac{1}{3}$，号 $P\left(A_2\mid A_1\right)=\dfrac{1}{3}$，$P\left(A_2\mid\overline{A_1}\right)=\dfrac{2}{3}$，

由全概率公式，得 $P\left(A_2\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2\mid A_1\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P\left(A_2\mid\overline{A_1}\right)$

$=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$；

（2）（i）设 $A_n=$ “第 n 天选择米饭套餐” $(n=1,2,\cdots)$，

则 $P_n=P\left(A_n\right)$，$P\left(\overline{A_n}\right)=1-P_n$，$P\left(A_{n+1}\mid A_n\right)=\dfrac{1}{3}$，$P\left(A_{n+1}\mid\overline{A_n}\right)=\dfrac{2}{3}$，

由全概率公式，得 $P\left(A_{n+1}\right)=P\left(A_n\right)P\left(A_{n+1}\mid A_n\right)+P\left(\overline{A_n}\right)P\left(A_{n+1}\mid\overline{A_n}\right)=-\dfrac{1}{3}P_n+\dfrac{2}{3}$，

即 $P_{n+1}=-\dfrac{1}{3}P_n+\dfrac{2}{3}$，$\therefore P_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(P_n-\dfrac{1}{2}\right)$，

$\because P_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$，$\therefore\left\{P_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ 是以 $\dfrac{1}{6}$ 为首项，$-\dfrac{1}{3}$ 为公比的等比数列；

（ii）由（i）可得 $P_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，

当 n 为大于 1 的奇数时，$P_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\le\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{14}{27}<\dfrac{5}{9}$；

当 n 为正偶数时，$P_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}<\dfrac{1}{2}<\dfrac{5}{9}$.

21.解：（1）由题意得 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，$D\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$，

设直线 AB 的方程为 $x=ty+\dfrac{p}{2}(t\in\mathrm{R})$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，

由$\begin{cases}x=ty+\dfrac{p}{2},\\y^2=2px\end{cases}$得 $y^2-2tpy-p^2=0$，

$\therefore y_1+y_2=2tp$， $y_1y_2=-p^2$，

$\therefore \left(y_1-y_2\right)^2=\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2=4p^2\left(t^2+1\right)$，

$\therefore \triangle DAB$ 面积 $S_{\Delta DAB}=\dfrac{1}{2}|DF|\cdot\left|y_1-y_2\right|=p^2\sqrt{t^2+1}\ge p^2$，

当 $t=0$ 时，$S_{\Delta DAB}$ 取最小值 p^2， $\therefore p=2$，

$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$；

（2）由（1）得抛物线 $C:y^2=4x$，假设存在定点 $P\left(x_0,y_0\right)$，

设直线 l 的方程为 $x-5=m(y-2)(m\in R)$， $M\left(x_3,y_3\right)$，$N\left(x_4,y_4\right)$，则 $y_3\ne y_0$， $y_4\ne y_0$，

由$\begin{cases}x-5=m(y-2),\\y^2=4x\end{cases}$得 $y^2-4my+4(2m-5)=0$，

$\therefore y_3+y_4=4m$， $y_3y_4=4(2m-5)$，

$\because PM\perp PN$， $\therefore \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，

$\because \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=\left(x_3-x_0\right)\left(x_4-x_0\right)+\left(y_3-y_0\right)\left(y_4-y_0\right)=\dfrac{1}{16}\left({y_3}^2-{y_0}^2\right)\left({y_4}^2-{y_0}^2\right)+\left(y_3-y_0\right)\left(y_4-y_0\right)$，

$\therefore {y_0}^2+\left(y_3+y_4\right)y_0+y_3y_4+16=0$， $\therefore 4\left(y_0+2\right)m+\left({y_0}^2-4\right)=0$，

当 $y_0+2=0$ 时，即$\begin{cases}y_0=-2,\\x_0=1\end{cases}$时，$PM\perp PN$ 恒成立，$\therefore$ 存在定点 $P(1,-2)$.

22.解：（1）当 $k=1$ 时， $f(x)=x\ln x+1$， $x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\ln x+1$，

令 $f'(x)<0$，则 $0<x<\dfrac{1}{e}$；令 $f'(x)>0$，则 $x>\dfrac{1}{e}$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{e}$ 处取得最小值 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=1-\dfrac{1}{e}$；

（2）①当 $k=1$ 时，则 $f(x)=x\ln x+1>1>0$，显然成立；

②当$k>1$时，原不等式等价于$k<\frac{x+x\ln x}{x-1}$，

令$g(x)=\frac{x+x\ln x}{x-1}$，$x>1$，则$g'(x)=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$，

令$h(x)=x-\ln x-2$，$x>1$，则$h'(x)=\frac{x-1}{x}>0$，$\therefore h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

$\because h(3)=1-\ln 3<0$，$h(4)=2(1-\ln 2)>0$，

$\therefore \exists x_0\in(3,4)$，$h\left(x_0\right)=0$，即$x_0-\ln x_0-2=0$，$\therefore x_0-2=\ln x_0$，

当$x\in\left(1,x_0\right)$时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$\therefore g(x)$在$\left(1,x_0\right)$上单调递减，

当$x\in\left(x_0,+\infty\right)$时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$在$\left(x_0,+\infty\right)$上单调递增，

$\therefore g(x)$在$x=x_0$处取得最小值为$g\left(x_0\right)=\frac{x_0+x_0\ln x_0}{x_0-1}=x_0$，

$\therefore k<g\left(x_0\right)=x_0$，且$x_0\in(3,4)$，

综上，实数k的最大整数值为3.

注：以上各题其它解法请酌情赋分.