绝密★启用前

2024年茂名市高三年级第一次综合测试

数学试卷

试卷共4页,22小题,满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡右上角"条形码粘贴处"。
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案,答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新的答案;不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后,请将答题卡交回。

一、单选题:本大题共8小题,每小题5分,满分40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{-1,0,1\}$, $C=A\cap B$,则集合 C 的子集个数为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 8

2. "$x<1$"是"$x^2-4x+3>0$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 从6名女生3名男生中选出2名女生1名男生,则不同的选取方法种数为

A. 33　　B. 45　　C. 84　　D. 90

4. 曲线 $f(x)=e^x+ax$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与直线 $y=2x$ 平行,则 $a=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

5. 椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过 F_1 作垂直于 x 轴的直线 l,交 C 于 A,B 两点,若 $|AB|=|F_1F_2|$,则 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B. $\sqrt{2}-1$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}-1$　　D. $2-\sqrt{2}$

6. 函数 $y=f(x)$ 和 $y=f(x-2)$ 均为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,若 $f(1)=2$,则 $f(2\,023)=$

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 2

7. 若 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$, $6\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=5\cos 2\alpha$,则 $\sin 2\alpha=$

A. $\frac{24}{25}$　　B. $\frac{12}{25}$　　C. $\frac{7}{25}$　　D. $\frac{1}{5}$

8. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=8$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{na_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$, $b_n=\left(\frac{1}{a_n}+\lambda\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$,若数列 $\{b_n\}$ 是递减数列,则实数 λ 的取值范围是

A. $\left(-\frac{8}{7},+\infty\right)$　　B. $\left(-\frac{7}{8},+\infty\right)$　　C. $\left(\frac{8}{7},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{7}{8},+\infty\right)$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 若 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+1$ 是区间 $(m-1,m+4)$ 上的单调函数，则实数 m 的值可以是

A. -4　　　　B. -3　　　　C. 3　　　　D. 4

10. 过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F 作直线 l，交 C 于 A,B 两点，则

A. C 的准线方程为 $x=-2$

B. 以 AB 为直径的圆与 C 的准线相切

C. 若 $|AB|=5$，则线段 AB 中点的横坐标为 $\frac{3}{2}$

D. 若 $|AB|=4$，则直线 l 有且只有一条

11. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为棱 AB,BC 的中点，则

A. 直线 EF 与 BC_1 所成的角为 $60°$

B. 过空间中一点有且仅有两条直线与 A_1B_1,A_1D_1 所成的角都是 $60°$

C. 过 A_1,E,F 三点的平面截该正方体，所得截面图形的周长为 $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

D. 过直线 EF 的平面截正方体，所得截面图形可以是五边形

12. 从标有 $1,2,3,\cdots,10$ 的 10 张卡片中，有放回地抽取两张，依次得到数字 a,b，记点 $A(a,b)$，$B(1,-1)$，$O(0,0)$，则

A. $\angle AOB$ 是锐角的概率为 $\frac{9}{20}$

B. $\angle BAO$ 是锐角的概率为 $\frac{9}{100}$

C. $\triangle AOB$ 是锐角三角形的概率为 $\frac{9}{100}$

D. $\triangle AOB$ 的面积不大于 5 的概率为 $\frac{9}{20}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知复数 $z=\frac{2}{1+i}$，其中 i 为虚数单位，则 $\bar{z}=$______.

14. 如图，茂名的城市雕像“希望之泉”是茂名人为了实现四个现代化而努力奋斗的真实写照. 被托举的四个球堆砌两层放在平台上，下层 3 个，上层 1 个，两两相切. 若球的半径都为 a，则上层的最高点离平台的距离为

15. 动点 P 与两个定点 $O(0,0)$，$A(0,3)$ 满足 $|PA|=2|PO|$，则点 P 到直线 $l:mx-y+4-3m=0$ 的距离的最大值为______

16. 函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上有且只有两个零点，则 ω 的取值范围是______.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10 分)在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$a\cos B-b\cos A-a+c=0$.

(1)求B的值；

(2)若M为AC的中点，且$a+c=4$，求BM的最小值.

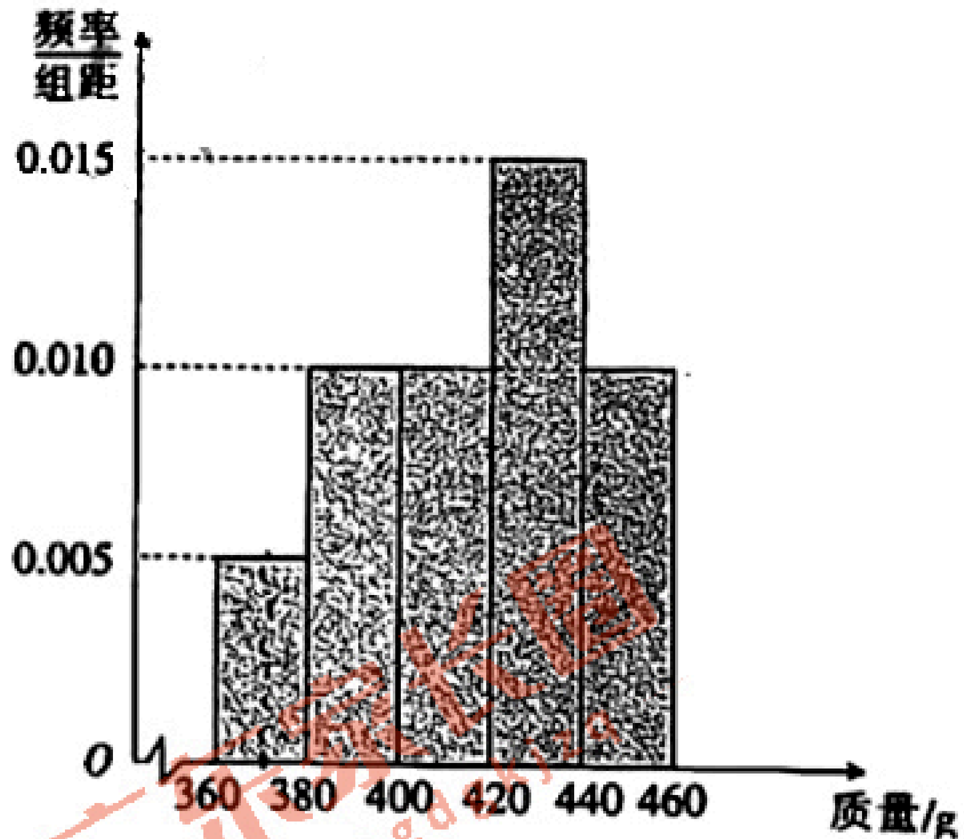
18. (12 分)已知某种业公司培育了新品种的软籽石榴，从收获的果实中随机抽取了 50 个软籽石榴，按质量(单位：g)将它们分成 5 组：[360,380)，[380,400)，[400,420)，[420,440)，[440,460]，得到如下频率分布直方图.

(1)用样本估计总体，求该品种石榴的平均质量；(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)

(2)按分层随机抽样，在样本中，从质量在区间[380,400)，[400,420)，[420,440)内的石榴中抽取 7 个石榴进行检测，再从中抽取 3 个石榴作进一步检测.

(i)已知抽取的 3 个石榴不完全来自同一区间，求这 3 个石榴恰好来自不同区间的概率；

(ii)记这 3 个石榴中质量在区间[420,440)内的个数为X，求X的分布列与数学期望.



19. (12 分)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，数列$\left\{\frac{S_n}{n(n+1)}\right\}$是首项为$\frac{1}{2}$、公差为$\frac{1}{3}$的等差数列.

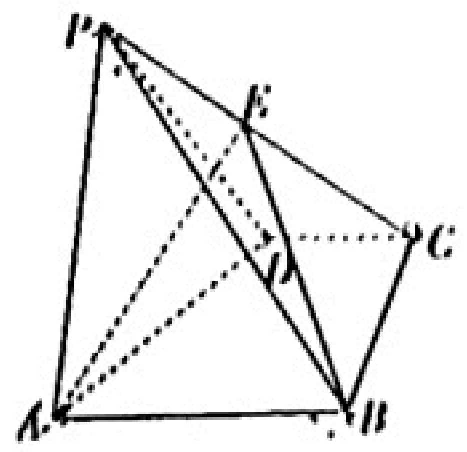
(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令$b_n=\frac{(2n-1)a_n}{S_n}$，$T_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项积，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}T_i\leqslant\frac{6^n-1}{5}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

20. (12 分)如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB // CD$, $AB \perp BC$, $PD = AB = 2CD = 2$, $BC = \sqrt{2}$, $\angle PDC = 120°$.

(1)证明:$PB \perp AD$;

(2)点 E 在线段 PC 上,当直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时,求平面 ABE 与平面 PBC 的夹角的余弦值.



21. (12 分)已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的左焦点为 F, A, B 分别为双曲线的左、右顶点,顶点到双曲线的渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求 E 的标准方程;

(2)过点 B 的直线与双曲线左支交于点 P(异于点 A),直线 BP 与直线 $l: x = -1$ 交于点 M, $\angle PFA$ 的角平分线交直线 l 于点 N,证明:N 是 MA 的中点.

22. (12 分)若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义,且对于任意不同的 $x_1, x_2 \in [a,b]$,都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < k|x_1 - x_2|$,则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的"k 类函数".

(1)若 $f(x) = \frac{x^2}{2} + x$,判断 $f(x)$ 是否为 $[1,2]$ 上的"3 类函数";

(2)若 $f(x) = a(x-1)e^x - \frac{x^2}{2} - x\ln x$ 为 $[1,e]$ 上的"2 类函数",求实数 a 的取值范围;

(3)若 $f(x)$ 为 $[1,2]$ 上的"2 类函数",且 $f(1) = f(2)$,证明:$\forall x_1, x_2 \in [1,2]$, $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$.