2024年1月“七省联考”押题预测卷01

数　学

（考试时间：120分钟　试卷满分：150分）

注意事项：

1．本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答第I卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3．回答第II卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

4．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若集合 $A=\{x\mid x-2<0\}$，集合 $B=\{x\mid 2^x>1\}$，则 $A\bigcap B=$（　　）

A．$(2,+\infty)$　　B．$(0,2)$　　C．$(-\infty,2)$　　D．R

【答案】B

【解析】由题意，集合 $A=\{x\mid x-2<0\}=\{x\mid x<2\}$，$B=\{x\mid 2^x>1\}=\{x\mid x>0\}$，

根据集合交集的运算，可得 $A\cap B=\{x\mid 0<x<2\}$．

故选：B．

2．已知 i 是虚数单位，若非零复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=|z|^2$，则 $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}=$（　　）

A．1　　B．-1　　C．i　　D．$-\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $(1-\mathrm{i})z=(1-\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})=(a+b)+(b-a)\mathrm{i}$，

由 $(1-\mathrm{i})z=|z|^2$ 可得 $(a+b)+(b-a)\mathrm{i}=a^2+b^2$，

所以，$\begin{cases}a+b=a^2+b^2\\ b-a=0\end{cases}$，又因为 $z\neq 0$，所以，$a=b=1$，则 $z=1+\mathrm{i}$，故 $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}=1$．

故选：A．

3．江南的周庄、同里、甪直、西塘、乌镇、南浔古镇，并称为“江南六大古镇”，是中国江南水乡风貌最具代表的城镇，它们以其深邃的历史文化底蕴、清丽婉约的水乡古镇风貌、古朴的吴侬软语民俗风情，在世界上独树一帜，驰名中外．这六大古镇中，其中在苏州境内的有 3 处．某家庭计划今年暑假从这 6 个古镇中挑选 2 个去旅游，则只选一个苏州古镇的概率为（　　）

A．$\dfrac{2}{5}$　　B．$\dfrac{3}{5}$　　C．$\dfrac{1}{5}$　　D．$\dfrac{4}{5}$

【答案】B

【解析】从这 6 个古镇中挑选 2 个去旅游的可能情况有 $C_6^2=15$ 种情况，

只选一个苏州古镇的概率为 $P=\dfrac{C_3^1C_3^1}{15}=\dfrac{3}{5}$.

故选：B

4．基础建设对社会经济效益产生巨大的作用，某市投入 a 亿元进行基础建设，t 年后产生 $f(t)=ae^{\lambda t}$ 亿元社会经济效益．若该市投资基础建设 4 年后产生的社会经济效益是投资额的 2 倍，且再过 t 年，该项投资产生的社会经济效益是投资额的 8 倍，则 $t=$（　　）

A．4　　B．8　　C．12　　D．16

【答案】B

【解析】由条件得 $ae^{4\lambda}=2a$，$\therefore\lambda=\dfrac{\ln 2}{4}$，即 $f(t)=ae^{\frac{t\ln 2}{4}}$．设投资 t 年后，产生的社会经济效益是投资额的 8 倍，则有 $ae^{\frac{t\ln 2}{4}}=8a$，解得，$t=12$．所以再过 $12-4=8$ 年，该项投资产生的社会经济笑意是投资额的 8 倍．

故选：B．

5．已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}(\vec{a}\neq\vec{b})$ 满足 $|\vec{a}|=3$，且 $\vec{b}$ 与 $\vec{b}-\vec{a}$ 的夹角为 30°，则 $|\vec{b}|$ 的最大值为（　　）

A．2　　B．4

C．6　　D．8

【答案】C

【解析】因为 $|\vec{a}|=3$，且 $\vec{b}$ 与 $\vec{b}-\vec{a}$ 的夹角为 30°，

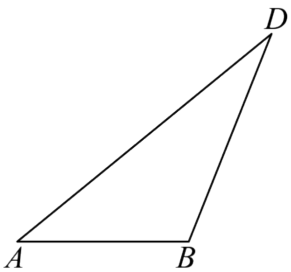
如图所示，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$，

由题意知 $\angle ADB=30^\circ$，设 $\angle ADB=\theta$，

因为 $|\vec{a}|=3$，在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin 30^\circ}=\dfrac{AD}{\sin\theta}$，解得 $AD=6\cos\theta\le 6$，

所以 $|\vec{b}|$ 的最大值为 6．

故选:C．



6．设一组样本数据 x_1，x_2，…，x_n 的极差为 1，方差为 0.1，若数据 ax_1+b，ax_2+b，…，ax_n+b 的极差为 2，则数据 ax_1+b，ax_2+b，…，ax_n+b 的方差为（　　）

A．0.02　　B．0.04　　C．0.2　　D．0.4

【答案】D

【解析】由题意可知，一组样本数据 x_1，x_2，…，x_n 的极差为 1，则 $|x_n-x_1|=1$，

又数据 ax_1+b，ax_2+b，…，ax_n+b 的极差为 2，

则$\left|ax_n+b-(ax_1+b)\right|=\left|a(x_n-x_1)\right|=2$，

所以$|\boldsymbol{a}|=2$，

故数据ax_1+b，ax_2+b，…，ax_n+b的方差为$2^2\times 0.1=0.4$，

故选：D

7．在$\triangle ABC$中，已知$AB=2$，$AC=4$，$\angle BAC=60°$，BC，AC边上的两条中线AM，BN相交于点P，则$\angle MPN$的余弦值是（　　）．

A．$\dfrac{1}{14}$　　B．$\dfrac{\sqrt{7}}{14}$　　C．$\dfrac{\sqrt{13}}{14}$　　D．$\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

【答案】B

【解析】由余弦定理得$BC=\sqrt{4+16-2\times2\times4\times\cos60°}=2\sqrt{3}$，

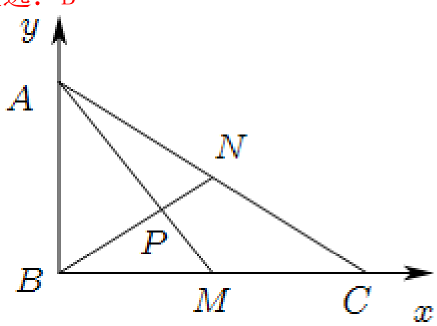
所以$AB^2+BC^2=AC^2$，所以三角形ABC是直角三角形，且$\angle ABC=90°$，

以B为原点建立如图所示平面直角坐标系，$A(0,2),M(\sqrt{3},0),C(2\sqrt{3},0),N(\sqrt{3},1)$，

$\overrightarrow{MA}=(-\sqrt{3},2),\overrightarrow{NB}=(-\sqrt{3},-1)$，$\angle MPN=\angle APB=\langle\overrightarrow{MA},\overrightarrow{NB}\rangle$，

所以$\cos\angle MPN=\cos\langle\overrightarrow{MA},\overrightarrow{NB}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{NB}}{|\overrightarrow{MA}|\cdot|\overrightarrow{NB}|}=\dfrac{1}{\sqrt{7}\times2}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

故选：B



8．已知函数$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\cos x-2$，设$a=f(\log_2 0.2),b=f(\log_{0.3}0.2),c=f(0.2^{0.3})$，则（　　）

A．$a>c>b$　　B．$a>b>c$　　C．$c>b>a$　　D．$b>c>a$

【答案】B

【解析】函数$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\cos x-2$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(-x)=\dfrac{1}{2}(-x)^2+\cos(-x)-2=f(x)$，故$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\cos x-2$为偶函数，

当$x\geq 0$时，$f'(x)=x-\sin x$，令$g(x)=x-\sin x$，则$g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，即$g(x)=x-\sin x$在$[0,+\infty)$上单调递增，故$g(x)\geq g(0)=0$，所以$f'(x)\geq 0$，则$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

由于$\log_2 0.2=\log_2\dfrac{1}{5}=-\log_2 5\in(-3,-2)$，$2=\log_{0.3}0.09>\log_{0.3}0.2>\log_{0.3}0.3=1$，

$0<0.2^{0.3}<1$，所以$a>b>c$．

故选：B．

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．下列结论正确的是（　　）

A. 若随机变量ξ，η满足$\eta=2\xi+1$，则$D(\eta)=2D(\xi)+1$

B. 若随机变量$\xi \sim N(3,\sigma^2)$，且$P(\xi<6)=0.84$，则$P(3<\xi<6)=0.34$

C. 若样本数据(x_i,y_i)（$i=1$，2，3，…，n）线性相关，则用最小二乘估计得到的经验回归直线经过该组数据的中心点$(\overline{x},\overline{y})$

D. 根据分类变量 X 与 Y 的成对样本数据，计算得到$\chi^2=4.712$．依据$\alpha=0.05$的独立性检验（$x_{0.05}=3.841$），可判断 X 与 Y 有关

【答案】BCD

【解析】对 A，由方差的性质可知，若随机变量ξ，η满足$\eta=2\xi+1$，则$D(\eta)=2^2\times D(\xi)=4D(\xi)$，故 A 错误；

对 B，根据正态分布的图象对称性可得$P(3<\xi<6)=P(\xi<6)-0.5=0.34$，故 B 正确；

对 C，根据回归直线方程过样本中心点可知 C 正确；

对 D，由$\chi^2=4.712>3.841$可判断 X 与 Y 有关，故 D 正确.

故选：BCD.

10．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，正项等比数列$\{b_n\}$的前n项积为T_n，则（　　）

A. 数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列

B. 数列$\{3^{a_n}\}$是等比数列

C. 数列$\{\ln T_n\}$是等差数列

D. 数列$\left\{\frac{T_{n+2}}{T_n}\right\}$是等比数列

【答案】ABD

【解析】设$\{a_n\}$的公差为d，$\{b_n\}$的公比为q，

则$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n \Rightarrow \frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}n+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)$，

所以$\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=\frac{d}{2}(n\ge 2)$是常数，故 A 正确；

易知$\frac{3^{a_n}}{3^{a_{n-1}}}=3^{a_n-a_{n-1}}=3^d\ (n\ge 2)$是常数，故 B 正确；

由$\ln T_n-\ln T_{n-1}=\ln b_n\ (n\ge 2)$不是常数，故 C 错误；

$\frac{T_{n+2}}{T_n}\div\frac{T_{n+1}}{T_{n-1}}=\frac{b_{n+2}}{b_n}=q^2\ (n\ge 2)$是常数，故 D 正确.

故选：ABD

11．已知圆O：$x^2+y^2=4$与圆$C:x^2+y^2-2x+4y+4=0$相交于 A，B两点，直线$l:x-2y+5=0$，点P为直线l上一动点，过P作圆O的切线PM，PN，（M，N为切点），则说法正确的是（　　）

A. 直线 AB 的方程为 $x-2y+4=0$

B. 线段 AB 的长为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

C. 直线 MN 过定点 $\left(-\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$

D. $|PM|$ 的最小值是 2.

【答案】BC

【解析】由题知，联立 $\begin{cases}x^2+y^2=4\\x^2+y^2-2x+4y+4=0\end{cases}$,

两式相减得 $x-2y-4=0$,

即直线 AB 的方程为 $x-2y-4=0$，A 错；

联立 $\begin{cases}x^2+y^2=4\\x^2+y^2-2x+4y+4=0\end{cases}$,

解得 $\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{8}{5}\\y=-\frac{6}{5}\end{cases}$,

所以 $|AB|=\sqrt{\left(\frac{8}{5}-0\right)^2+\left(-\frac{6}{5}+2\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，B 正确；

对于 C，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,

因为 M， N 为圆 O 的切点，

所以直线 PM 方程为 $xx_1+yy_1=4$,

直线 PN 的方程为 $xx_2+yy_2=4$,

又设 $P(x_0,y_0)$,

所以 $\begin{cases}x_0x_1+y_0y_1=4\\x_0x_2+y_0y_2=4\end{cases}$,

故直线 MN 的方程为 $x_0x+y_0y=4$,

又因为 $x_0-2y_0+5=0$,

所以 $(2x+y)y_0-5x-4=0$,

由 $\begin{cases}2x+y=0\\-5x-4=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-\frac{4}{5}\\y=\frac{8}{5}\end{cases}$,

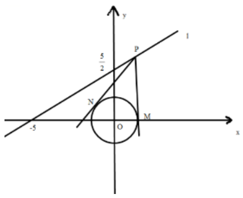
即直线 MN 过定点 $\left(-\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$，C 正确；

因为 $PM^2+OM^2=PO^2$,

所以当 $|PM|$ 最小时， $|PO|$ 最小，

且$|PO|$最小为$\dfrac{|0-0+5|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\sqrt{5}$，

所以此时$|PM|=\sqrt{(\sqrt{5})^2-4}=1$，D 错.



故选：BC

12．直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，所有棱长都相等，且$\angle DAB=60^\circ$，M为BB_1的中点，P为四边形BB_1C_1C内一点（包括边界），下列结论正确的是（　　）

A．平面D_1AM截四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的截面为直角梯形

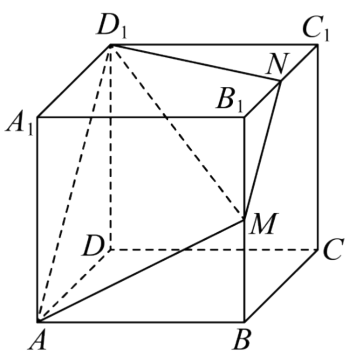
B．$CB_1\perp$面D_1AM

C．平面BB_1C_1C内存在点P，使得$DP\perp AM$

D．$V_{A_1-AD_1M}:V_{C-AD_1M}=1:3$

【答案】AB

【解析】对 A，取B_1C_1的中点为N，$AD_1//MN$，$AMND_1$为截面，



因为$\angle DAB=60^\circ=\angle D_1C_1B_1$，设$AD=2,\therefore C_1N=1$，

在$\triangle NC_1D_1$中，$D_1N^2=C_1N^2+C_1D_1{}^2-2C_1N\cdot C_1D_1\cos 60^\circ$，得$D_1N^2=3$，

则$D_1N^2+C_1N^2=C_1D_1{}^2$，即$D_1N\perp C_1N$，

又$BB_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，$D_1N\subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，则$D_1N\perp B_1B$，

$C_1N\cap B_1B=B_1$，$C_1N\subset$面BB_1C_1C，$B_1B\subset$面BB_1C_1C，

可知$D_1N\perp$面BB_1C_1C，且$MN\subset$面BB_1C_1C，所以$D_1N\perp MN$，A 对

对 B，因为$D_1N\perp$面BB_1C_1C，且$C_1B\subset$面BB_1C_1C，则$D_1N\perp CB_1$，

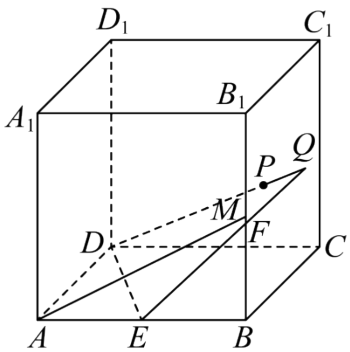
又$MN\perp CB_1$，$MN\cap D_1N=N$，$MN\subset$平面$AMND_1$，$D_1N\subset$平面$AMND_1$，

则$CB_1\perp$平面$AMND_1$，B 对；

对 C，过D作$DE\perp AB$，因为$BB_1\perp$平面$ABCD$，$DE\subset$平面$ABCD$，

$\therefore DE\perp BB_1$，$BB_1\cap AB=B$，$BB_1,AB\subset$平面ABB_1A_1，

所以 $DE\perp$ 平面 ABB_1A_1，延长 DP 交面 ABB_1A_1 于 Q，连接 EQ 交 BB_1 于 F，



则 EF 为 DP 在面 AA_1B_1B 的射影，

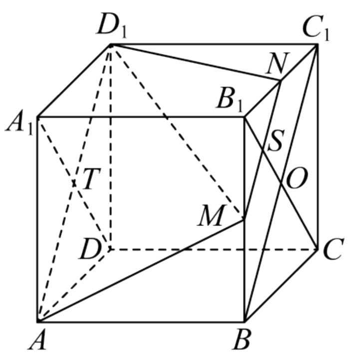
若 $DP\perp AM$，又 $AM\subset$ 平面 ABB_1A_1，则 $DE\perp AM$，

$DP\cap DE=D$，$DP,DE\subset$ 平面 DEP，则 $AM\perp$ 平面 DEP，

$EF\subset$ 平面 DEP，则有 $AM\perp EF$，

但当 P 在四边形 BB_1C_1C 内运动时，F 在 BB_1 上运动，此时 EF 不可能与 AM 垂直，C 错；

对 D：连接 BC_1 交 B_1C 于 O，BC_1 交 MN 于 S，连接 A_1D 交 D_1A 于 T，



$CB_1//A_1D$，因为 $CB_1\perp$ 平面 $AMND_1$，则 $A_1D\perp$ 平面 $AMND_1$，

则 A_1T 为点 A_1 到面 AD_1M 的距离，CS 为点 C 到面 AD_1M 的距离，

$MN//BC_1$，则点 B 到面 AD_1M 的距离即点 O 到面 AD_1M 的距离，即 OS，

则 $A_1T:OS=2:1$，$CS:OS=3:1$，则 $A_1T:CS=2:3$

$V_{A_1-AD_1M}:V_{C-AD_1M}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle AD_1M}\cdot A_1T:\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle AD_1M}\cdot CO=2:3$，D 错；

故选：AB

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知 $\left(2x^{-2}-x^3\right)^n$ 展开式的二项式系数之和为 256，则其展开式中 x^4 的系数为____________．（用数字作答）

【答案】1120

【解析】由 $2^n=256=2^8$，得 $n=8$．

$\left(2x^{-2}-x^3\right)^8$ 展开式的通项 $T_{r+1}=C_8^r\left(2x^{-2}\right)^{8-r}\left(-x^3\right)^r=C_8^r2^{8-r}\left(-1\right)^rx^{5r-16}$，

令 $5r-16=4$，得 $r=4$，

，

则展开式中含 x^4 的项为 $T_5=C_8^4 2^{8-4}\times(-1)^4 x^4=1120x^4$.

所以 x^4 的系数为 1120.

故答案为：1120.

14. 若函数 $f(x)=\sin x\cos x-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象在 $\left(\frac{\pi}{4},\theta\right)$ 内恰有 2 条对称轴，则 θ 的值可能为______________.

【答案】$\frac{17\pi}{12}$ （答案不唯一）

【解析】$f(x)=\sin x\cos x-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$

$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\theta\right)$ 时，$\frac{\pi}{6}<2x-\frac{\pi}{3}<2\theta-\frac{\pi}{3}$，

因为函数 $f(x)$ 的图象在 $\left(\frac{\pi}{4},\theta\right)$ 内恰有 2 条对称轴，所以 $\frac{3\pi}{2}<2\theta-\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{2}$，

解得 $\frac{11\pi}{12}<\theta\le\frac{17\pi}{12}$，则 θ 的值可能为 $\frac{17\pi}{12}$

故答案为：（答案不唯一）

15. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为 $\frac{3\pi}{2}$，侧面积分别为 $S_{甲}$ 和 $S_{乙}$，体积分别为 $V_{甲}$ 和 $V_{乙}$. 若 $\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则 $\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$____________.

【答案】$\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ## $\frac{8}{5}\sqrt{5}$

【解析】设母线长为 l，甲圆锥底面半径为 r_1，乙圆锥底面圆半径为 r_2，

则 $\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=\frac{\pi r_1 l}{\pi r_2 l}=\frac{r_1}{r_2}=2$，所以 $r_1=2r_2$，

又 $\frac{2\pi r_1}{l}+\frac{2\pi r_2}{l}=\frac{3\pi}{2}$，则 $\frac{r_1+r_2}{l}=\frac{3}{4}$，所以 $r_1=\frac{l}{2},r_2=\frac{l}{4}$，

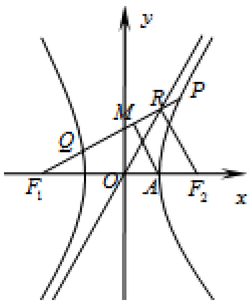
所以甲圆锥的高 $h_1=\sqrt{l^2-\frac{1}{4}l^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}l$，

乙圆锥的高 $h_2=\sqrt{l^2-\frac{1}{16}l^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}l$，

所以 $\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2}=\frac{\frac{1}{4}l^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}l}{\frac{1}{16}l^2\times\frac{\sqrt{15}}{4}l}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

16．如图，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a,b>0\right)$的右顶点为A，左右焦点分别为$F_1,F_2$，点$P$是双曲线右支上一点，$PF_1$交左支于点$Q$，交渐近线$y=\frac{b}{a}x$于点$R,M$是$PQ$的中点，若$RF_2\perp PF_1$，且$AM\perp PF_1$，则双曲线的离心率是__________.



【答案】2

【解析】设$R(x_0,y_0)$，则$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=c^2\\ y_0=\frac{b}{a}x_0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_0=a\\ y_0=b\end{cases}$，即$R(a,b)$，由题意$AM//F_2R$，所以$\overrightarrow{AM}=\frac{a+c}{2c}\overrightarrow{F_2R}$，所以$M(\frac{2ac-b^2}{2c},\frac{b(a+c)}{2c})$．又设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，两式相减得$\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=\frac{b^2}{a^2}$，即$k_{OM}\cdot k_{PQ}=\frac{b^2}{a^2}$，所以$k_{PQ}=\frac{b(2ac-b^2)}{a^2(a+c)}$，又$k_{PQ}=k_{RF_1}=\frac{b}{a+c}$，化简得$c=2a$，$e=\frac{c}{a}=2$．

故答案为：2

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．已知$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，$(a\cos C+c\cos A)\cos\frac{A}{2}=a\sin B$．

（1）求角A；

（2）若D为边BC上一点，且满足$AD=CD$，$S_{\triangle ACD}=2S_{\triangle ABD}$，证明：$\triangle ABC$为直角三角形．

【答案】（1）$A=\frac{\pi}{3}$　　（2）证明见解析

【解析】（1）在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$(\sin A\cos C+\sin C\cos A)\cos\frac{A}{2}=\sin A\sin B$，

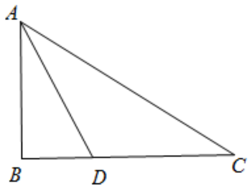
所以$\sin\left(A+C\right)\cos\frac{A}{2}=\sin A\sin B$，即$\sin B\cos\frac{A}{2}=\sin A\sin B$，

因为$B\in(0,\pi),\therefore\sin B\neq 0$，所以$\sin A=\cos\frac{A}{2}$，

又因为$A\in(0,\pi)$，$\dfrac{A}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\sin A=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$，$\cos\dfrac{A}{2}\neq 0$，

所以$\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$；

（2）证明：因为$S_{\triangle ACD}=2S_{\triangle ABD}$，所以$CD=2BD$，



设$\angle ACD=\theta$，在$\triangle ACD$中，$AD=CD=2BD$，则$\angle CAD=\theta$.

可得$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}-\theta$，$\angle ABC=\dfrac{2\pi}{3}-\theta$，

在$\triangle ABD$中，由正弦定理得，$\dfrac{BD}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{AD}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}$，

又因为$AD=2BD$，所以$2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)$，

则$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta$，

化简得$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，因为$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，即$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，则$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$.

所以$\triangle ABC$是直角三角形.

18．已知数列$\{a_n\}$的前n项的和为S_n，数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是公差为1的等差数列.

（1）证明：数列$\{a_n\}$是公差为2的等差数列；

（2）设数列$\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项的和为$T_n$，若$S_3=9$，证明$T_n<\dfrac{1}{2}$.

【答案】（1）证明见解析　　（2）证明见解析

【解析】（1）因为数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是公差为1的等差数列，所以$\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{S_1}{1}+n-1=n-1+a_1$.

从而可得$S_n=n^2+(a_1-1)n$.

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=a_1+2(n-1)$.

即可得$a_n-a_{n-1}=2$，所以数列$\{a_n\}$是公差为2的等差数列；

（2）根据第（1）问数列$\{a_n\}$是公差为2的等差数列可得$S_3=3a_1+3\times 2=3a_1+6=9$，

从而可得$a_1=1$.

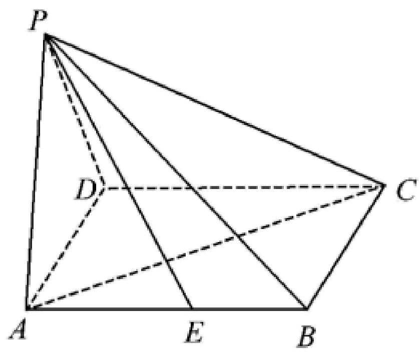
所以数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2n-1$.

所以$\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$.

从而可得$T_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4n+2}$.

所以$T_n<\dfrac{1}{2}$成立.

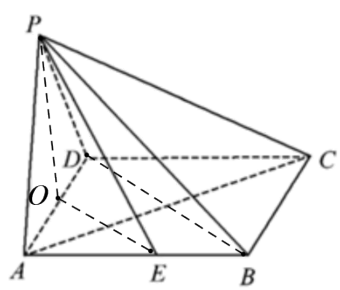
19．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为菱形，E为棱AB的中点，$AC\perp PE$，$PA=PD$.



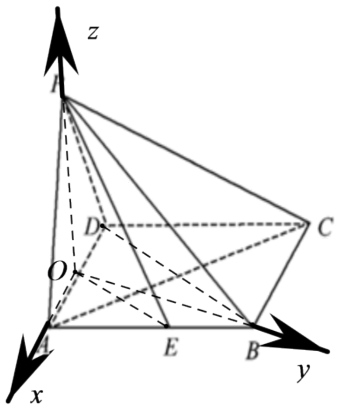
（1）证明：平面$PAD\perp$平面$ABCD$;
（2）若$PA=AD$，$\angle BAD=60°$，求二面角$E-PD-A$的正弦值.

【答案】（1）证明见解析　　（2）$\dfrac{2}{13}\sqrt{13}$.

【解析】（1）



如图，连接BD，取AD中点O，连接PO,OE，因底面$ABCD$为菱形，故$AC\perp BD$，又E为棱AB的中点，故$OE//BD$，则$AC\perp OE$，
已知$AC\perp PE,OE,PE\subset$平面POE，$OE\cap PE=E$，故$AC\perp$平面POE，因$PO\subset$平面POE，则$AC\perp PO$，因$PA=PD$，则$PO\perp AD$，
又$AD,AC\subset$平面$ABCD$，$AD\cap AC=A$，则$PO\perp$平面$ABCD$，又$PO\subset$平面PAD，故平面$PAD\perp$平面$ABCD$.
（2）



如图，连 OB，由（1）知 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，且 $\angle BAD=60°$，则 $\triangle ABD$ 是正三角形，$OB\perp AD$，故可以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}$ 分别为 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$. 不妨设 $AD=4$，则

$E(1,\sqrt{3},0),P(0,0,2\sqrt{3}),D(-2,0,0),A(2,0,0)$,

于是 $\overrightarrow{DE}=(3,\sqrt{3},0),\ \overrightarrow{DP}=(2,0,2\sqrt{3})$，设平面 DEP D 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则有

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=3x+\sqrt{3}y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=2x+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$，可取 $\vec{n}=(-\sqrt{3},3,1)$.

因 $OB\perp AD$，$PO\perp BO$ 故可取平面 PDA 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(0,1,0)$.

设二面角 $E-PD-A$ 的平面角为 θ，则 θ 为锐角，故 $\cos\theta=|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{3}{13}\sqrt{13}$, 则

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2}{13}\sqrt{13}.$

即二面角 $E-PD-A$ 的正弦值为 $\dfrac{2}{13}\sqrt{13}$.

20．设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2.A，B 是该椭圆 C 的右顶点和上顶点，且 $|AB|=\sqrt{5}$，若该椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）直线 l 与椭圆 C 交于 P，Q 两点，且与 x 轴交于点 $D(x_D>a)$. 若直线 PF_2 与直线 QF_2 的倾斜角互补，求 $\triangle PQF_2$ 的面积的最大值.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　　（2）$\dfrac{1}{4}$

【解析】（1）由题可得，$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$，

所以 $a^2+b^2=5$　　因为椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，结合椭圆中 $b^2=a^2-c^2$ 可知，

$a=2$，$b=1$. 所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）$F_2\left(\sqrt{3},0\right)$，设 $P\left(x_1, y_1\right)$，$Q\left(x_2, y_2\right)$.

因为直线 PF_2 与直线 QF_2 的倾斜角互补，

所以可知 $k_{PF_2}+k_{QF_2}=0$，

即 $\dfrac{y_1}{x_1-\sqrt{3}}+\dfrac{y_2}{x_2-\sqrt{3}}=0$，

化简得 $x_1y_2+x_2y_1-\sqrt{3}\left(y_1+y_2\right)=0$.

设直线 $PQ:x=my+n(n>2)$，

将 $x_1=my_1+n$，$x_2=my_2+n$ 代入上式，

整理可得 $2my_1y_2+\left(n-\sqrt{3}\right)\left(y_1+y_2\right)=0$.

且由 $\begin{cases}x=my+n,\\x^2+4y^2=4\end{cases}$ 消元化简可得

$\left(m^2+4\right)y^2+2mny+n^2-4=0$，

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{2mn}{m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{n^2-4}{m^2+4}$，代入上式

由 $\dfrac{2m\left(n^2-4\right)}{m^2+4}-\left(n-\sqrt{3}\right)\dfrac{2mn}{m^2+4}=0$，

解得 $n=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

所以 $PQ:x=my+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

因为点 $F_2\left(\sqrt{3},0\right)$ 到直线 PQ 的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{3+3m^2}}$，

且 $|PQ|=\sqrt{\left(1+m^2\right)\left[\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2\right]}=\sqrt{1+m^2}\cdot\dfrac{4\sqrt{3m^2-4}}{\sqrt{3}\left(m^2+4\right)}$

所以 $S_{\triangle PQF_2}=\dfrac{1}{2}d\cdot|PQ|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3+3m^2}}\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot\dfrac{4\sqrt{3m^2-4}}{\sqrt{3}\left(m^2+4\right)}=\dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{3m^2-4}}{m^2+4}$.

令 $t=\sqrt{3m^2-4}$，则 $m^2=\dfrac{t^2+4}{3}$

所以 $S_{\triangle PQF_2}=\dfrac{2t}{t^2+16}\le\dfrac{1}{4}$，.

当且仅当 $t=4$，$m^2=\dfrac{20}{3}$ 时取等号.

所以 $\triangle PQF_2$ 的面积的最大值为 $\dfrac{1}{4}$.

21．为不断改进劳动教育，进一步深化劳动教育改革，现从某单位全体员工中随机抽取 3 人做问

卷调查. 已知某单位有 N名员工，其中$\frac{2}{5}$是男性，$\frac{3}{5}$是女性.

（1）当$N=20$时，求出 3 人中男性员工人数 X的分布列和数学期望；

（2）我们知道，当总量 N足够大而抽出的个体足够小时，超几何分布近似为二项分布. 现在全市范围内考虑. 从 N名员工（男女比例不变）中随机抽取 3 人，在超几何分布中男性员工恰有 2 人的概率记作 P_1；有二项分布中（即男性员工的人数$X\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$）男性员工恰有 2 人的概率记作 P_2.

那么当 N至少为多少时，我们可以在误差不超过 0.001（即$P_1-P_2\le 0.001$）的前提下认为超几何分布近似为二项分布.（参考数据：$\sqrt{578}\approx 24.04$）

【答案】（1）分布列见解析，数学期望为$\frac{6}{5}$

（2）N至少为 145 时，我们可以在误差不超过 0.001（即$P_1-P_2\le 0.001$）的前提下认为超几何分布近似为二项分布

【解析】（1）当$N=20$时，男性员工有 8 人，女性员工有 12 人.

X服从超几何分布，$X=0,1,2,3$，

$P(X=0)=\frac{C_{12}^3}{C_{20}^3}=\frac{220}{1140}=\frac{11}{57}$，$P(X=1)=\frac{C_8^1C_{12}^2}{C_{20}^3}=\frac{528}{1140}=\frac{44}{95}$，

$P(X=2)=\frac{C_8^2C_{12}^1}{C_{20}^3}=\frac{336}{1140}=\frac{28}{95}$，$P(X=3)=\frac{C_8^3}{C_{20}^3}=\frac{56}{1140}=\frac{14}{285}$，

∴ X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{11}{57}$	$\frac{44}{95}$	$\frac{28}{95}$	$\frac{14}{285}$

数学期望为$E(X)=0\times\frac{11}{57}+1\times\frac{44}{95}+2\times\frac{28}{95}+3\times\frac{14}{285}=\frac{6}{5}$.

（2）$P_1=\frac{C_{\frac{2}{5}N}^2C_{\frac{3}{5}N}^1}{C_N^3}=\frac{\frac{1}{5}N\left(\frac{2}{5}N-1\right)\times\frac{3}{5}N}{\frac{1}{6}N(N-1)(N-2)}=\frac{18}{25}\cdot\frac{N\left(\frac{2}{5}N-1\right)}{(N-1)(N-2)}$，

$P_2=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{3}{5}=\frac{36}{125}=0.288$，

由于$P_1-P_2\le 0.001$，则$\frac{18}{25}\cdot\frac{N\left(\frac{2}{5}N-1\right)}{(N-1)(N-2)}-0.288\le 0.001$，

即$\frac{18}{25}\cdot\frac{N\left(\frac{2}{5}N-1\right)}{(N-1)(N-2)}\le 0.289=\frac{289}{1000}$，

即 $\dfrac{N\left(\frac{2}{5}N-1\right)}{(N-1)(N-2)} \le \dfrac{289}{1000}\times\dfrac{25}{18}=\dfrac{289}{720}$，

由题意易知 $(N-1)(N-2)>0$，

从而 $720N\left(\frac{2}{5}N-1\right)\le 289(N-1)(N-2)$，

化简得 $N^2-147N+578\ge 0$，

又 $N>0$，于是 $N+\dfrac{578}{N}\ge 147$.

由于函数 $y=x+\dfrac{578}{x}$ 在 $x=\sqrt{578}\approx 24.04$ 处有极小值，

从而 $y=N+\dfrac{578}{N}$ 当 $N\ge 25$ 时单调递增，

又 $142+\dfrac{578}{142}\approx 146.07<147$，$143+\dfrac{578}{143}\approx 147.04>147$.

因此当 $N\ge 143$ 时，符合题意，

而又考虑到 $\dfrac{2}{5}N$ 和 $\dfrac{3}{5}N$ 都是整数，则 N 一定是 5 的整数倍，于是 $N=145$.

即 N 至少为 145，

我们可以在误差不超过 0.001（即 $P_1-P_2\le 0.001$）的前提下认为超几何分布近似为二项分布.

22．已知函数 $f(x)=ae^x-e^{-x}$，（$a\in\mathrm{R}$）.

（1）若 $f(x)$ 为偶函数，求此时 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）设函数 $g(x)=f(x)-(a+1)x$，且存在 x_1,x_2 分别为 $g(x)$ 的极大值点和极小值点.

（ⅰ）求实数 a 的取值范围；

（ⅱ）若 $a\in(0,1)$，且 $g(x_1)+kg(x_2)>0$，求实数 k 的取值范围.

【答案】（1）$y+2=0$

（2）（ⅰ）$(0,1)\cup(1,+\infty)$；（ⅱ）$(-\infty,-1]$

【解析】

（1）$f(x)$ 为偶函数，有 $f(-x)=ae^{-x}-e^x=f(x)=ae^x-e^{-x}$，则 $a=-1$，

所以 $f(x)=-e^x-e^{-x}$，$f'(x)=-e^x+e^{-x}$

所以 $f(0)=-2$，$f'(0)=0$

所以 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y+2=0$.

（2）（ⅰ）$g(x)=f(x)-(a+1)x=ae^x-e^{-x}-(a+1)x$，

$$g'(x)=ae^x+e^{-x}-(a+1)=\frac{ae^{2x}-(a+1)e^x+1}{e^x}=\frac{(ae^x-1)(e^x-1)}{e^x},$$

因为函数 $g(x)$ 既存在极大值，又存在极小值，

则 $g'(x)=0$ 必有两个不等的实根，则 $a>0$，

令 $g'(x)=0$ 可得 $x=0$ 或 $x=-\ln a$，

所以 $-\ln a\ne 0$，解得 $a>0$ 且 $a\ne 1$.

令 $m=\min\{0,-\ln a\}$， $n=\max\{0,-\ln a\}$，则有：

x	$(-\infty,m)$	m	(m,n)	n	$(n,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

可知 $g(x)$ 分别在 $x=m$ 和 $x=n$ 取得极大值和极小值，符合题意.
综上，实数 a 的取值范围是 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.
（ii）由 $a\in(0,1)$，可得 $-\ln a>0$，
所以 $x_1=0$， $x_2=-\ln a$， $g(x_1)=a-1$， $g(x_2)=1-a+(a+1)\ln a$ 且有 $g(x_2)<g(x_1)<0$，
由题意可得 $a-1+k[1-a+(a+1)\ln a]>0$ 对 $\forall a\in(0,1)$ 恒成立，
由于此时 $g(x_2)<g(x_1)<0$，则 $k<0$，
所以 $k(a+1)\ln a>(k-1)(a-1)$，则 $\ln a<\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{a-1}{a+1}$，
令 $h(x)=\ln x-\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}$，其中 $0<x<1$，
则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-2x\left(1-\frac{1}{k}\right)}{x(x+1)^2}=\frac{x^2+\frac{2}{k}x+1}{x(x+1)^2}$，
令 $x^2+\frac{2}{k}x+1=0$，则 $\Delta=\frac{4}{k^2}-4=\frac{4(1-k^2)}{k^2}$.
①当 $\Delta\le 0$，即 $k\le -1$ 时， $h'(x)\ge 0$， $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上是严格增函数，
所以 $h(x)<h(1)=0$，即 $\ln a<\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{a-1}{a+1}$，符合题意；
（2）当 $\Delta>0$，即 $-1<k<0$ 时，
设方程 $x^2+\frac{2}{k}x+1=0$ 的两根分别为 x_3， x_4 且 $x_3<x_4$，
则 $x_3+x_4=-\frac{2}{k}>0$， $x_3x_4=1$，则 $0<x_3<1<x_4$，
则当 $x_3<x<1$ 时， $h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $(x_3,1)$ 上单调递减，
所以当 $x_3<x<1$ 时， $h(x)>h(1)=0$，即 $\ln a>\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{a-1}{a+1}$，不合题意.
综上所述， k 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.