



8. 若过点  $P(-1, m)$  可以作三条直线与曲线  $C: f(x) = \frac{x}{e^x}$  相切, 则  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left[-e, \frac{5}{e^2}\right)$       B.  $(-e, 0)$       C.  $\left(-e, \frac{5}{e^2}\right)$       D.  $\left(0, \frac{5}{e^2}\right)$

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项是符合题目要求的, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 对于下列概率统计相关知识, 说法正确的是 ( )

- A. 数据 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11 的第 75 百分位数是 7  
 B. 若事件  $M, N$  的概率满足  $P(M) \in (0, 1), P(N) \in (0, 1)$  且  $M, N$  相互独立, 则  $P(N|M) + P(\bar{N}) = 1$   
 C. 由两个分类变量  $X, Y$  的成对样本数据计算得到  $\chi^2 = 8.612$ , 依据  $\alpha = 0.001$  的独立性检验 ( $\chi_{0.001}^2 = 10.828$ ), 可判断  $X, Y$  独立  
 D. 若一组样本数据  $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$  的对应样本点都在直线  $y = -4x + 7$  上, 则这组样本数据的相关系数为  $-1$

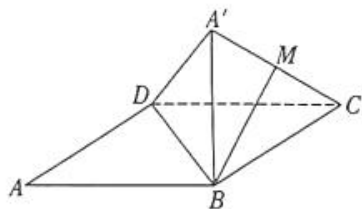
10. 已知平面向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 1, \vec{c} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \vec{b}$ , 则下列说法正确的是 ( )

- A.  $\vec{b} \perp (\vec{a} - \vec{b})$       B.  $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 3$   
 C.  $\frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $\forall \lambda \in \mathbf{R}, |\vec{a} - \lambda\vec{b}| \geq |\vec{a} - \vec{b}|$  恒成立

11. 已知圆  $O: x^2 + y^2 = 4$ , 过直线  $l: x + y - 6 = 0$  上一点  $P$  作圆  $O$  的两条切线, 切点分别为  $A, B$ , 则 ( )

- A. 若点  $P$  的坐标为  $(1, 5)$ , 则  $|PA| = \sqrt{22}$       B.  $\triangle PAO$  面积的最小值为  $2\sqrt{3}$   
 C. 直线  $AB$  过定点  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$       D.  $|AB| \in \left[\frac{4\sqrt{7}}{3}, 4\right)$

12. 如图, 在菱形  $ABCD$  中,  $AB = 2, \angle BAD = \frac{\pi}{3}$ , 将  $\triangle ABD$  沿  $BD$  折起, 使  $A$  到  $A'$ , 点  $A'$  不在底面  $BCD$  内, 若  $M$  为线段  $A'C$  的中点, 则在  $\triangle ABD$  翻折过程中, 以下说法正确的是 ( )



A.  $BD \perp A'C$

B. 四面体  $A'-BCD$  的表面积的最大值为  $4 + 2\sqrt{3}$

C. 不存在点  $A'$ , 使得  $BM \perp CD$

D. 当二面角  $A'-BD-C$  的余弦值为  $\frac{1}{3}$  时, 四面体  $A'-BCD$  的内切球的半径为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

### 三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

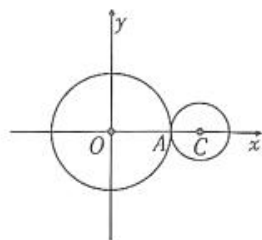
13.  $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中第五项为\_\_\_\_\_. (系数用数字作答)

14. 已知动圆  $M$  过点  $(0, 1)$ , 且与直线  $y = -1$  相切, 则圆心  $M$  的轨迹方程为\_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(x)$  为偶函数, 其图象关于点  $(6, 0)$  对称. 当  $x \in [0, 6]$  时,

$f(x) = x^2 - 6x$ , 则  $f(2024) =$ \_\_\_\_\_.

16. 如图, 已知动圆  $C$  和定圆  $O$  ( $O$  为坐标原点) 的半径分别为 1 和 2, 动圆的圆心  $C$  的初始坐标为  $C(3, 0)$ , 动圆  $C$  上的点  $A$  的初始坐标为  $(2, 0)$ , 动圆  $C$  逆时针沿定圆  $O$  滚动, 则在滚动过程中, 点  $A$  离开其初始位置距离的最大值为\_\_\_\_\_.



### 四、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $\sin A, \sin B, \sin C$  成等差数列, 且  $b = 5, c = 3$ .

(1) 求角  $A$ ;

(2) 求角  $A$  的内角平分线  $AD$  的长.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项积为  $T_n$ , 且  $T_{n+1} = 2T_n - \frac{T_n}{a_n}$ ,  $a_1 = \frac{1}{3}$ .

(1) 求证: 数列  $\{T_n\}$  是等差数列, 并且求其通项公式;

(2) 证明:  $\lg|a_1| + \lg|a_2| + \lg|a_3| + \cdots + \lg|a_{1500}| < 3$ .

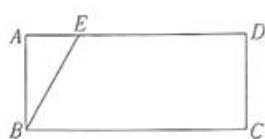
19. (本小题满分 12 分)

某校高一年级举行数学史知识竞赛，每个同学从10道题中一次性抽出4道作答. 小张有7道题能答对，3道不能答对；小王每道答对的概率均为 $p(0 < p < 1)$ ，且每道题答对与否互不影响.

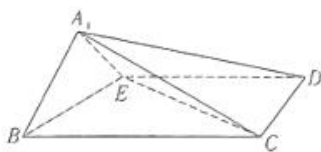
- (1) 分别求小张，小王答对题目数的分布列；
- (2) 若预测小张答对题目数多于小王答对题目数，求 $p$ 的取值范围.

20. (本小题满分12分)

如图甲，在矩形 $ABCD$ 中， $AB \perp BC$ ， $AB = \sqrt{3}$ ， $BC = 4$ ， $E$ 为边 $AD$ 上的点，且 $AE = 1$ . 将 $\triangle ABE$ 沿 $BE$ 翻折，使得点 $A$ 到 $A_1$ ，满足平面 $A_1BC \perp$ 平面 $A_1EC$ ，连接 $A_1C$ ， $A_1D$ ，如图乙.



甲



乙

- (1) 求证：平面 $A_1BE \perp$ 平面 $BCDE$ ；
- (2) 求二面角 $E - A_1C - D$ 的正弦值的大小.

21. (本小题满分12分)

已知双曲线 $C$ 的方程为： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ ，若点 $A(x_0, y_0)$ 是曲线 $C$ 上一点，以点 $A(x_0, y_0)$ 为切点作双曲线 $C$ 的切线 $l$ .

- (1) 求证：切线 $l$ 的方程为 $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$ ；
- (2) 分别过双曲线 $C$ 的左焦点 $F_1(-c, 0)$ 和右焦点 $F_2(c, 0)$ 作切线 $l$ 的垂线，垂足分别为 $N_1$ ， $N_2$ . 求证：

$|F_1N_1| \cdot |F_2N_2|$ 为定值.

22. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1014x + 1013 \ln x$ .

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；
- (2) 若 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ ，且 $x_1 < x_2 < x_3$ ，求证： $x_3 - x_1 < 2024$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线