2023—2024学年度上期高2024届期末考试

数学试卷（理科）

考试时间：120分钟　满分：150分

注意事项： 1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上.

2. 本试卷分选择题和非选择题两部分.

3. 答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号.

4. 答非选择题时，必须使用0.5毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定位置上.

5. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效.

6. 考试结束后，只将答题卡交回.

第Ⅰ卷(选择题,共60分)

一、选择题：(本题共12小题,每小题5分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合$M=\left\{y\mid y=2^x,x>1\right\},N=\left\{x\mid y=\sqrt{2x-x^2}\right\}$，则$M\cup N$等于（　）

A. $\varnothing$　　B. $\{2\}$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $[0,+\infty)$

2.已知$f(x)=\dfrac{e^x}{e^{ax}-1}$为奇函数，则$a=$（　）

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

3.复数z满足$(z+2)i=1-i$（i为虚数单位），则z的共轭复数的虚部是（　）

A. -3　　B. 1　　C. i　　D. $-i$

4.已知首项为1，公比为q的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则“$S_3=3$”是“$q=-2$”的(　)

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

5.设函数$f(x)=x+2$，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$a_n=2f(n)-1$，$f(b_n)=2n-1$，则$a_6=$（　）

A. b_7　　B. b_9　　C. b_{11}　　D. b_{13}

6.记ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，分别以a,b,c为边长的正三角形的面积依次为S_1,S_2,S_3，

且$S_1-S_2-S_3=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}bc$，则$A=$（　）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{3\pi}{4}$

7. 若$x^6=a_0+a_1(x-6)+a_2(x-6)^2+\cdots a_6(x-6)^6$，则$a_5=$　（　）

A. 6　　B. 16　　C. 36　　D. 90

8．已知等边ΔABC内接于圆$\Gamma: x^2+y^2=1$，且P是圆Γ上一点，则$\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$的最大值是(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

9.已知函数$f(x)=\left|\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\left|\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$，则$f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内的零点个数为（　　）

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

10.已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱长为 2，$AB\perp BC, AB=BC=2$，过AB, BB_1的中点E, F作平面α与平面AA_1C_1C垂直，则平面α截该三棱柱所得截面的周长为（　　）

A. $2\sqrt{2}+\sqrt{6}$　　B. $\sqrt{2}+2\sqrt{6}$　　C. $3\sqrt{2}+\sqrt{6}$　　D. $3\sqrt{2}+2\sqrt{6}$

11．某教师准备对一天的五节课进行课程安排，要求语文、数学、外语、物理、化学每科分别要排一节课，则数学不排第一节，物理不排最后一节的情况下，化学排第四节的概率是（　）

A. $\frac{3}{20}$　　B. $\frac{7}{39}$　　C. $\frac{3}{13}$　　D. $\frac{17}{78}$

12.已知$P(x,y)$为函数$y=e^{|x-1|}+2x^2-4x$图象上一动点，则$\frac{x+y+3}{\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}}$的最大值为（　　）

A. $\frac{e+5}{\sqrt{e^2+8e+17}}$　　B. $\frac{e+5}{\sqrt{2e^2+16e+34}}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}(e+5)$

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:（本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.）

13.已知椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{m^2}=1(m>0)$的离心率为$\frac{1}{3}$，则$m=$___________

14.在棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$为平行四边形，$|AA_1|=3, |BD|=4$，$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{DC}=5$，设异面直线$AA_1$与$BD$的夹角为$\theta$，则$\cos\theta=$___________

15.已知函数$f(x)=\begin{cases}|\log_3 x|, 0<x<3\\ 4-x, \quad x\geq 3\end{cases}$，若存在$0<a<b<c$满足$f(a)=f(b)=f(c)$，则$\frac{f(a)f(c)}{abc}$的取值范围为_____________

16. 已知数列$\{a_n\}$满足a_1是正整数，$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}, & a_n\text{为偶数}\\ 3a_n+1, & a_n\text{为奇数}\end{cases}$，（$n\in N^*$），若$a_1+a_2+a_3=2023$，则$a_1$的值为____________

三、**解答题:**（本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤 .）

17．（本小题满分 12 分）

在ΔABC中，$AC=1, BC=\sqrt{7}$.

（1）若$A=150^{\circ}$，求$\cos B$；

（2）D为AB边上一点，且$BD=2AD=2CD$，求ΔABC的面积.

18．（本小题满分 12 分）

2023 年实行新课标新高考改革的省市共有 29 个，选科分类是高级中学在校学生生涯规划的重要课题，某高级中学为了解学生选科分类是否与性别有关，在该校随机抽取 100 名学生进行调查．统计整理数据得到如下的2×2列联表：

	选物理类	选历史类	合计
男生	35	15	
女生	25	25	
合计			100

（1）依据小概率值0.05的独立性检验，能否据此推断选科分类与性别有关联？

（2）在以上随机抽取的女生中，按不同选择类别同比例分层抽样，共抽取 6 名女生进行问卷调查，然后在被抽取的 6 名女生中再随机抽取 4 名女生进行面对面访谈．设面对面访谈的女生中选择历史类的人数为随机变量X，求随机变量X的分布列和数学期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

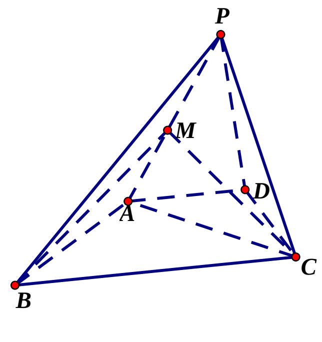
$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.（本小题满分 12 分）

如图, 四棱锥$P-ABCD$中, $AD/\!/BC, BC\perp CD, BC=2CD=2AD=2\sqrt{2}$, 平面$ABCD\perp$平面$PAC$.

（1）证明: $PC\perp AB$;

（2）若$PA=PC=\dfrac{\sqrt{5}}{2}AC, M$是$PA$的中点, 求平面$MBC$与平面$PAC$夹角的正弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的短轴长为$4\sqrt{2}$，离心率为$\frac{1}{3}$.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）设椭圆C的左，右焦点分别为F_1,F_2，左，右顶点分别为A,B，点M,N为椭圆C上位于x轴上方的两点，且$F_1M\,//\,F_2N$，记直线AM,BN的斜率分别为k_1,k_2，若$3k_1+2k_2=0$，求直线F_1M的方程.

21．(本小题满分 12 分)

已知函数$f\left(x\right)=ax\ln x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2x}+2$

(1) 当$a=1$时，求$f\left(x\right)$的单调区间;

(2) 对$\forall x\in\left[1,+\infty\right)$，$f\left(x\right)\geq 0$恒成立，求$a$的取值范围;

(3) 对于任意$n\in N^*$，证明：$\frac{1}{4\left(n+2\right)}<\ln 2-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)<\frac{1}{4n}$

请考生在第 22，23 题中任选择一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分. 作答时，用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目所对应的标号涂黑.

22．[选修 4－4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

在直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$为参数）. 以坐标原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C$的极坐标方程为$\rho=2\cos\theta$.

(1) 求C的直角坐标方程;

(2) 设点M的直角坐标为$\left(\frac{1}{2},0\right)$，$l$与曲线$C$的交点为$A,B$，求$\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}$的值 .

23. [选修 4－5：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

已知函数$f\left(x\right)=\left|2x-1\right|+x+\frac{1}{2}$的最小值为$m$.

（1）求m的值；

（2）若a,b,c为正实数，且$a+b+c=m$，证明：$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$.